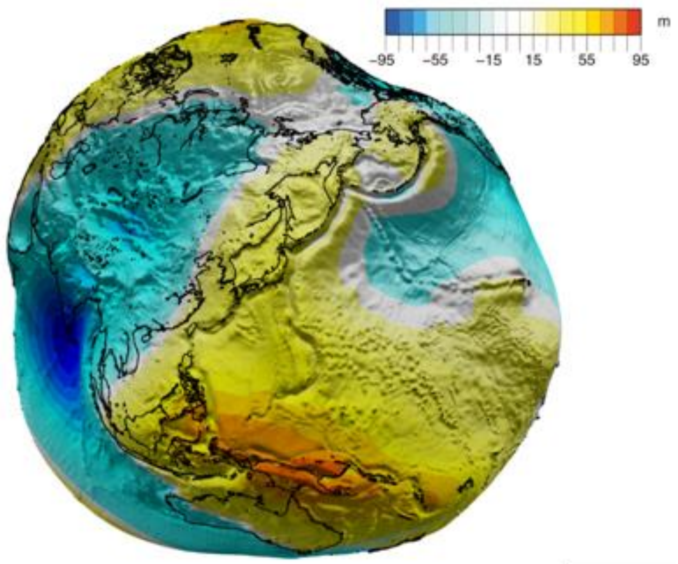
望遠鏡地上水準測量から GNSS 標高測量へ

50 頁で分かる図解によるやさしい
国際高さ基準座標系（IHRF）とジオイドのお話



全球のジオイド高。水平方向に対して鉛直方向を 1 万倍に誇張、千島海溝や日本海溝に凹みが見える
出典：国土地理院< https://www.gsi.go.jp/buturisokuchi/grageo_geoid.html >

2022 年 03 月

アイサンテクノロジー株式会社

はじめに

20 世紀後半の衛星測位が実用化するまでは、天文測量により地球上の絶対位置が決められ、この位置を既知点として三角測量により地球上の水平位置を決めました。20 世紀後半に衛星測位が実用化し、「国際地球基準座標系（ITRF）」に基づいて、地球上の cm 級の（X,Y,Z,T）の 4 次元位置が決められるようになりました。日本では 2002 年度から衛星測位による世界測地系が導入されました。この結果、天文測量による日本列島の位置誤差は、400m 余りの大きなものであることが分かりました。更に、2010 年から定常的地殻変動による異なった時期の座標を元期の座標で表示する「セミ・ダイナミック系 (Semi-dynamic datum)」が、導入されました。

このように、地球上の幾何学的３次元位置は、cm 単位で決まられるようになりましたが、人間生活上重要な水の流れと関係した標高は、地球の重力の影響を強く受けたもので、現在のところ、正確に決められていません。標高 H は、衛星測位で得られた幾何学的位置である楕円体高 h から、ジオイド高 N を減じた値です。ジオイド高は、準拠楕円体からジオイドまでの高さで定義されています。国土地理院は、その時々に応じて日本のジオイド 96、日本のジオイド 2000 及び日本のジオイド 2011 などを開発し、それを公開してきました。最新の日本のジオイドは、標準偏差でみて 3cm 程度と高精度化しています。ここで使われているジオイドは、測量法第 11 条において、東京湾平均海面と定められているものです。海面形状は、大きな変化を伴い、日本列島でも東京湾と東北の日本海側では、20cm 程度の食い違いがあります。大きな大陸では、1m 程度の食い違いがあります。ITRF と同様に、世界に共通する正確な標高は、「国際高さ基準座標系 (IHRF)」に基づくもので、世界がこの課題の実現に取り組んでいます。

現在の測量法第 11 条に定める従来型の望遠鏡水準測量による標高は、同法施行令第 2 条に定める日本水準原点を出発点とし、おおよそ 10 年かけて北海道から九州までの一等水準測量により決められたものです。この標高は、この 10 年間の地殻変動が考慮されない「スタティック系 (Static Datum)」によるものです。それに対して、測量法第 34 条に定める作業規程の準則第 43 条による衛星測位から得られる標高は、ITRF 元期の楕円体高から求められる標高で、「セミ・ダイナミック系(Semi-dynamic datum)」によるものです。一方、人間生活に必要な河川堤防や津波防潮堤の標高は、最新の値である「ダイナミック系(Dynamic Datum)」になります。例えば、2011 年東北地方太平洋沖地震の余効変動に伴う最新の標高は、ダイナミック系であり、日本水準原点を出発点とした手間のかかる水準測量によって求められるのが現状です。航空重力成果等に基づく正確なジオイドが構築され IHRF が実現されれば、従来の望遠鏡水準測量によらず、GNSS 水準測量によってダイナミック系の標高が容易に得られます。

日本は、ITRF に基づく世界測地系を 20002 年度導入しましたが、近い将来、IHRF に基づく国際高さ基準座標系の導入が必ずやってくると思います。そのため、浅学も顧みず、測量実務者を対象とした GNSS 水準測量及びジオイドなどの標高に関する基礎知識を提供するものとして、本書を作成しました。全 44 頁の中に 50 余りの図を用いて、理解の手助けにしてあります。

2022 年 03 月

技術顧問　中根勝見

技術顧問　松坂　茂

目次

１．地球の形(地表、回転楕円体、ジオイド)

地球を代表する形として、図 1.1 に示すような①地表面から海底面の凹凸の形の地球②回転楕円体で近似した地球③平均海面に近い等ポテンシャル面であるジオイドで表す地球の３種類があります。以下、それぞれの地球の形の概要を述べることにします。

現在の測量法に定める日本のジオイドは、東京湾平均海面を使っています。正確には、ジオイドは、正規楕円体[注1]が作る楕円体面のポテンシャル U_0 に対して、重力が作る無数の等ポテンシャル面（W）のうち、W_0（＝U_0）で定義されているものです。

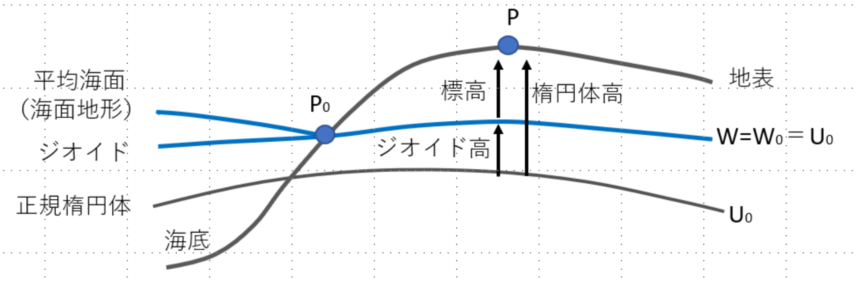


図 1.1　地球の３つの形（地表・ジオイド・楕円体）

【注 1】正規楕円体は、1980 年 17 回 IUGG 総会において採用された測地基準系 1980(Geodetic Reference System 1980：GRS80)が使われています。この正規楕円体は、次に示す重力ポテンシャルに関する４つの定数である楕円体長半径（a）、楕円体扁平率（f）、地心引力定数（GM）、自転角速度（ω）が含まれています。この４つの内、（a）及び（$1/f$）の２つの幾何定数が、測量法施行令第 2 条に定められています。

1.1　地表面による地球の形

地表の最高峰は、エベレストの「8,848m」です。最深海は、マリアナ海溝の「10,911m」です。これらの凹凸は、地球半径の約（10km／6370km）×100％＝0.16％にすぎません。巨視的に見れば、地球の凹凸は、ほとんどないに等しいといえます。

地表面は、地球内部の活動の影響を受けた定常的地殻変動、火山活動及び地震活動で絶えず変動しているダイナミックな面である。従って、水平変動並びに楕円体高及び標高は、ダイナミックな値になります。

1.2　地球楕円体とその座標系

地球楕円体は、長半径aと短半径bで表す回転楕円体で近似されます。扁平率は、$f = (a - b) / a$で表されます。三角測量時代は地球楕円体の４つの定数のうち、a及びfで地球楕円体を近似していました。一方の地球重力は、標準重力として、a及びfと関係なく決められていました。

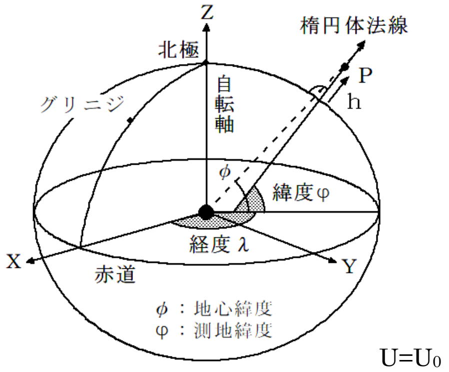


図 1.2　緯度（φ）・経度（λ）・楕円体高（h）

図 1.2 のＰ点の位置は楕円体座標系による座標「測地緯度（φ)、測地経度（λ)、楕円体高（h)」で表されます。測地経緯度は、測量法第 11 条で地理学的径緯度と呼ばれています。地球の中心からの角度ϕは地心緯度」と呼ばれ、測地緯度（φ）と異なることに注意する必要があります。又、測量法第 11 条は、位置を地心直交座標系(X,Y,Z)で表示できると定めています。衛星測位時代になってから使われ出した国際地球基準座標系 (International Terrestrial Reference Frame : ITRF)は、この地心直交座標系を使っています。

楕円体座標系と地心直交座標系の関係は、作業規程の準則（以下、「準則」という。）の計算式集に式(1.1)で示されています。

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (N+h)\cos\varphi\cos\lambda \\ (N+h)\cos\varphi\sin\lambda \\ \{N(1-e^2)+h\}\sin\lambda \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

ただし、h（楕円体高)、$N=a/W$ （卯酉線曲率半径)、a（楕円体の長半径)、b（楕円体の短半径)、e $=\sqrt{(a^2-b^2)/a^2}$（第１離心率)、$W=\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}$ です。

既に述べましたように、衛星測位時代は、地球楕円体を特徴づける定数として、上述の２つの幾何定数の他、地心引力定数GM及び自転角速度ωの２つの物理定数が必要になります。２幾何定数及び２物理定数によって、楕円体の表面のポテンシャル（U）が、等ポテンシャル面（U_0）を形成する楕円体となっています。

地球楕円体は、追補 3 で述べるように、潮汐フリー地殻上の位置を採用しているので、地表面のようなダイナミックな面ではなく、不変な面です。

1.3　ジオイド

ジオイドは、平均海面とその陸地へ延長した等ポテンシャル面に極めて近いものですが、平均海面と等しくありません（図 1.1)。日本測量協会の測量士・測量士補国家試験受験テキスト（令和元年）のジオイドの定義は、“海面の波浪、潮汐、海流などの影響を除いた静止した海面を考え、陸地の部分については、ごく狭い溝に海水を導入してできる仮想的海面をジオイドという。(39 頁)”となっています。これは、現在の測地学の定義としては正確な記述ではありません。この定義では、ジオイドと地球楕円体との関係が明らかではありませんから、全地球規模でのジオイド高は決まりません。定義は、すでに述べましたように“地球の重力がつくる無数の等ポテンシャル面Wのうち、地球楕円体が形成する等ポテンシャル面（U_0）に等しいW_0（$=U_0$）”で（図 1.3)、地球楕円体と関係づけられています。図 1.4 に示すように、楕円体からジオイドまでの距離がジオイド高になります。その凹凸は、地形の凹凸の約 1/100 に相当する±100m程度になります。

ジオイドは、追補 3 で述べるように、潮汐フリー地殻上の位置を採用していて、地表面のダイナミックな影響は小さく、ほぼ不変な面です。従って、ジオイド高は、地殻変動の影響をほとんど受けない不変な量になります。

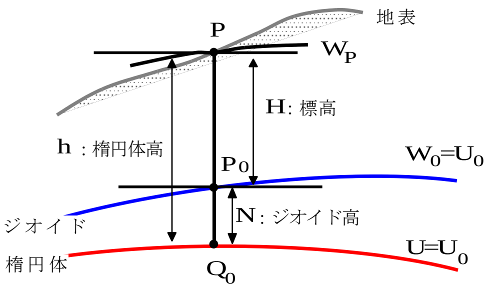


図 1.3 ジオイド（W_0)、楕円体(U_0)、地表（P）

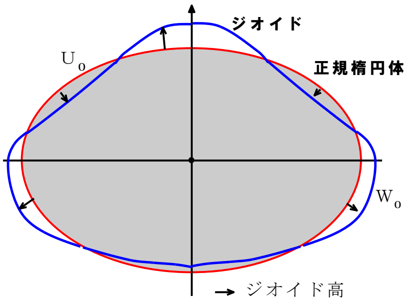


図 1.4 ジオイド高の凹凸±100m

1.4　平均海面（Mean Sea Level：MSL）

世界的な水準測量は、19 世紀から 20 世紀にかけて行われてきました。水準測量における基準面は、ジオイドですが、当時は、先に述べたW_0に示すようなジオイドが正確に作れるはずもなく、ジオイドに近い平均海面が、ジオイドに見立てられました。各国とも適当な場所に験潮場を設け潮位を測定し、それを水準測量の基準面にしました。そうした事情もあり、ジオイドの定義として平均海面とされるのだと思います。既に述べましたように、測地学的には、ジオイド＝平均海面とするのは正しい定義ではありません。

日本の場合、測量法第 11 条において平均海面を標高の基準面として定め、同法施行令第 2 条において、日本水準原点の標高を東京湾平均海面上 24.3900m と定めています。東京湾平均海面は、東京湾の霊岸島（現：千代田区新川二丁目の隅田川）で、1873（明治 6)年から 1879（明治 12）年までの平均潮位に基づいています。水準測量により、明治 24（1891）年 5 月に設置された東京千代田区永田町の日本水準原点（図 1.5）の標高を 24.500 m として定めました。この値が、日本の鉛直原子でした。従いまして、日本の測量法上のジオイドは、東京湾平均海面とその陸地への延長である等ポテンシャル面ということになります。

その後、1923 年関東地震に伴い、日本水準原点の高さが－0.0860m 移動し、24.4140m に改正されました。さらに、2011 年東北地方太平洋沖地震にともない日本水準原点の高さが、－0.0240m 移動し、現在の 24.3900m に改正されました。これらの鉛直原子の別名（識別子）は、全て同一の「東京湾平均海面（TP:Tokyo Peil）」だけです。水平位置の場合、測量法施行令第 2 条に日本経緯度原点の緯度・経度・原点方位角の測地原子が規定されています。これらの測地原子の別名（識別子）は、「日本測地系(TD: Tokyo Datum)」、「日本測地系 2000(JGD2000: Japanese Geodetic Datum 2000)」及び「日本測地系 2011(JGD2011:Japanese Geodetic Datum2011)」のように、測地原子毎に異なった別名（識別子）を使っています。米国の場合、測地原子及び鉛直原子の別名（識別子）は、それぞれ、「North American Datum of 1983(NAD83)」及び「North American Vertical Datum of 1988(NAVD88)」のように分かり易く区別されて表示されています。

図 1.5　日本水準原点：東京都千代田区永田町憲政記念館付近（国土地理院 Web サイトによる）

同様に、各国とも平均海面をジオイドに見立てて、標高の基準としてきています。平均海面の海面形状とジオイドは、大きいところでは、1 m 程度の食い違いがあり、平均海面をジオイドに見立てた標高は、1 m 以上の正確さを確保するのは困難です。例えば、日本における東京湾の平均海面と東北地方の日本海側の平均海面は 20cm 程度の食い違いがあります。オーストラリアのような大きな大陸では、平均海面とジオイドの差は、最大 1 m にも達します。アメリカ大陸の西海岸と東海岸での平均海面とジオイドの差は 1 m 程度になります。

現在、衛星測位により、地球上の３次元位置は、mm 単位の正確さで決められます。一方、全地球上の標高は、1 m 以内の正確さで決めることは困難でしょう。理由は、ジオイド（W_0）が正確に決められないためです。現在の測地学の大きな課題の一つは、正確なジオイドを決定することにあります。

２．地球楕円体

地球の大きさは、エラトステネスによって紀元前 230 年に測定されたと言われています。その後しばらく途絶えていた地球の形とその大きさの計測が、文芸復興により中世ヨーロッパで盛んになってきました。既に述べましたように、三角測量時代の地球は、長半径a及び扁平率fの２つの幾何定数を使っていました。地球の重力がつくる地球の形は、幾何定数とは分離した重力式を使っていました。衛星測位時代の現在は、既に述べましたように、長半径a及び扁平率fの２つの幾何定数の他に地球の質量M及び自転角速度ωの２つを加えた４パラメータで地球の形を特定しています。以下、各時代の地球の形を考察します。出典は、主として、Vanicek 他(1982)及び Torge 他 (2011)による測地学の教科書です。

2.1　紀元前の地球半径

紀元前 230 年にエラトステネスにより、地球半径 R を測定した原理は、図 2.1 に示されています。セーネ（A）から子午線に沿ってアレキサンドリア（B）までの距離 S を測定します。丁度夏至の時刻にセーネにある深井戸に太陽光が届いたとき、アレキサンドリアにおいて太陽の天頂角（ϕ）を測ります。その結果、地球の半径は、$R = S/\phi$　で表されます。この測定結果は、6300km と正確なものと言われています。

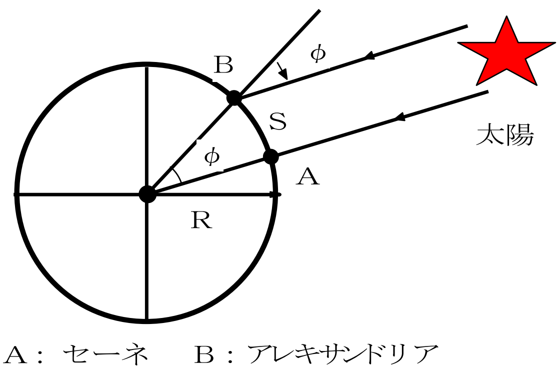


図 2.1　エラトステネスによる地球半径の測定原理

2.2　扁平な地球の形（ニュートンによる）

古代ギリシャの地球は、球でありました。それから約 2000 年の後、ニュートンは、地球の自転による遠心力を基に、扁平な地球楕円体を推定しました（図 2.2 左）。

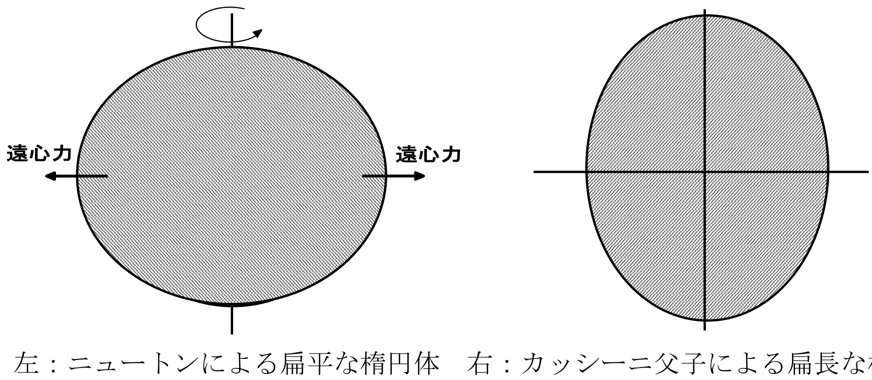


図 2.2　左：ニュートンによる扁平な楕円体　右：カッシーニ父子による扁長な楕円体

2.3　実測に基づく扁長な楕円体（カッシーニ父子による）

17 世紀末から 18 世紀初頭にかけて実施されたパリ近郊の子午線 1°の弧長測量の結果を基にカッシーニ父子は、扁長の楕円体を考えました（図 2.2 右)。後にこれは、天文測量の誤差に原因があることが分かりました。

2.4　19 世紀からの楕円体の測定結果

図 2.3 は、19 世紀に入ってからの楕円体の測定結果で、世界で使われてきた主な楕円体の長半径です。日本の旧測量法で 2001 年度まで使われてきたベッセル楕円体の長半径は、現在の GRS80 のそれより約 740m 短いものでした。人工衛星による観測値が使われるようになってから、楕円体要素の正確さは格段に向上しています。

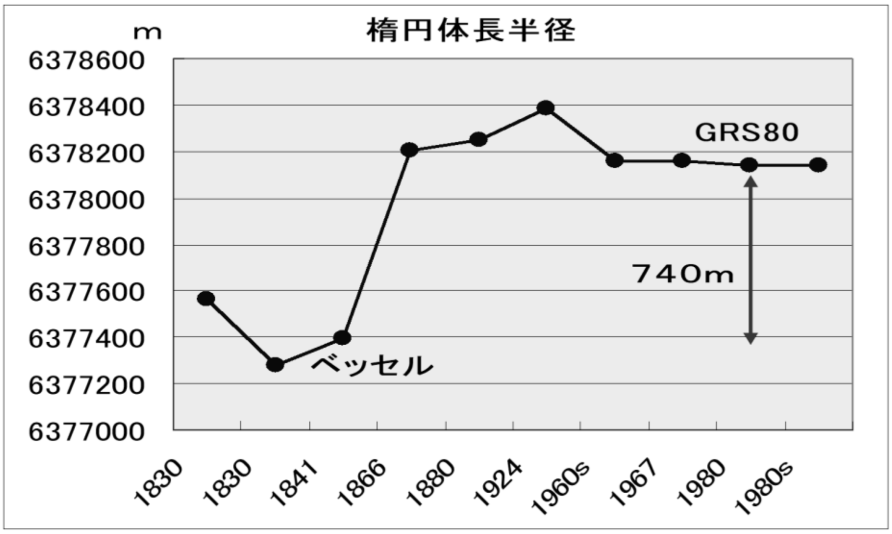


図 2.3　世界で使われてきた主な楕円体の長半径

2.5　地球楕円体の重力

水準測量成果は、地球の重力の場を基に標高を決定しなければなりません。そのため、地球の重力の場が定められてきました。1883 年に日本の水準測量が開始された頃は、重力の補正は行われていませんでした。詳しい話は、水準測量に対する重力の補正のところで述べたいと思います。

2.5.1　ヘルメルト 1884 標準重力

我が国では、1930 年頃から水準測量に重力の補正が行われるようになりました。1974 年頃まで式(2.1)に示すヘルメルト 1884 年標準重力 (坪川・大森、1968) が使われました。

$$g = 978.000(1 + 0.00531\sin^2\varphi)\ \ (gal) \qquad \varphi：緯度 \qquad (2.1)$$

この式から、水準測量の楕円補正の式(2.2)が導き出されました。

$$k = -5.31\mathrm{H}\sin\left(\varphi_P + \varphi_Q\right)\frac{\left(\varphi_P - \varphi_Q\right)}{3438'} \qquad (mm) \qquad (2.2)$$

ここに、φ_P、φ_Qは、水準路線の P 及び Q 点の緯度で、水準路線の出発点や終点に設置されます。又は、水準路線の変換点が選ばれます。ただし、P 及び Q 点は、$\sin\left(\varphi_P - \varphi_Q\right) \fallingdotseq \left(\varphi_P - \varphi_Q\right)$が成り立つ程度の間隔です。

2.5.2　ヘイフォードの国際重力式（1930）

日本測量協会測量学事典（平成 2 年）によれば、その後、ヘイフォードに基づく国際重力式(1930)の式(2.3)が、使われたとありますが、計算式などで確認がとれません。式(2.4)は、筆者が水準測量の計算簿等を確認したところ、2009 年まで使われていました。

$$g = 978.0327(1 + 0.0053024\sin^2\varphi - 0.0000058\sin^2 2\varphi) \quad (gal) \quad \varphi\text{：緯度} \tag{2.3}$$

この式から、水準測量の楕円補正の式(2.4)が導き出されました。

$$k = -5.29\mathrm{H}\sin(\varphi_P + \varphi_Q)\frac{(\varphi_P - \varphi_Q)}{3438'} \quad (mm) \tag{2.4}$$

2.5.3　GRS80 の正規重力式

2002 年度から世界測地系が導入されました。当然、楕円補正に GRS80 の正規重力が使われなければならなかったのですが、失念したようで、GRS80 に基づく式(2.5)に示す正規重力から式(2.6)に示す楕円補正の式が定められたのは、8 年後の 2010 年からでした。ただし、その影響は極めて小さく、標高の再計算を行う必要がないものでした。

$$\gamma_0 = 978.03267715(1 + 0.0052790414\sin^2\varphi + 0.0000232718\sin^4\varphi + 0.0000001262\sin^6\varphi + 0.0000000007\sin^8\varphi) \tag{2.5}$$

この式から、式(2.6)に示す楕円補正式が導かれました。

$$k = -5.28\mathrm{H}\sin(\varphi_P + \varphi_Q)\frac{(\varphi_P - \varphi_Q)}{3438'} \quad (mm) \tag{2.6}$$

日本の水準測量は 1883(明治 16)年から開始されました。筆者が当時の計算簿を確認しましたが、重力の補正は行われていませんでした。この補正のきっかけは、杉山測量師が、1906(明治 39)年ドイツ留学から帰国し、10 項目の改善案を示しました。その第 8 項に「一等水準真高計算の際地球重力偏差より起こる改正数を加える」ことが提案されました（陸地測量部沿革誌、大正 11 年）。その提案により、1915（大正 4）年の「水準測量実行法草案」に楕円改正の式が示されました。実際に、この実行法により楕円改正が計算されたのは、筆者が計算簿の確認を行った結果によれば、昭和 4、5 年頃からでした。補正式は、ヘルメルト 1884 重力式から導かれた式(2.2)が使われていました。

しかし、年が経つにつれ、楕円補正は、「楕円体状である地球の形を球形と仮定したために生じるわずかな誤差を補正するものである。」（公共測量作業規程運用と解説（昭和 60 年）というように、一般的な測量作業者が直感的に理解できるように、重力に関する物理測地学から楕円体幾何学の問題にすり替わってしまいました。無論、その後の公共測量作業規程の解説では、物理測地学に関する正しい記述に修正されています。

３．重力とその測定

さて、そもそも地球の重力とは何か？また、重力は、どのようにして測定するのか？以下に考察します。以下の記述は、日本測地学会 Web テキスト測地学 新装訂版（http://www.geod.jpn.org/web-text/#gsc.tab=0）を主な出展とし、一部文章及び図を引用させていただいております。

3.1 ニュートンの万有引力の法則と地球の形

今、質量m_1とm_2が、rの距離に離れてあるとき、これらの質量による引力F_1は、式(3.1)で示されます。

$$F_1 = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \tag{3.1}$$

この式は、「ニュートンの万有引力」と呼ばれる式です。ここでGは、万有引力定数で$(6.673 \pm 0.010) \times 10^{-11}[m^3 s^{-2} kg^{-1}]$です. 地球の引力と遠心力の大きさを見積もってみます。1kg の物体に働く地球の引力は、地球半径が約$6.4 \times 10^6 m$、 地球の質量Mが約$6.0 \times 10^{24}\ kg$で、 全質量が地球中心にある質点と仮定すると、$F_1 = GM/r^2 = (6.7 \times 10^{-11}) \times (6.0 \times 10^{24})/(6.4 \times 10^6)^2 = 9.81[N]$となります（1N=1kg･$m/s^2$)。

一方、質量mの物体が、 半径rの円周上を角速度ω で回転していると、$F_2 = mr\omega^2$の遠心力が働きます。赤道において 1kg の物体に働くF_2の大きさは、$\omega = 7.3 \times 10^{-5}[s^{-1}]$として、$F_2 = 1 \times (6.4 \times 10^6)(7.3 \times 10^{-5})^2 = 3.4 \times 10^{-2}[N]$となります。単位は、 [Gal= cm/s^2]の単位で表します。従って、赤道の重力は 981－3＝978Gal となります。

しかし、地球楕円体は、極半径が赤道半径より短いこともあって、赤道の重力は約 978Gal、極の重力は約 983Gal です。赤道と極の重力差は約 5%になります。ここに、[Gal]の単位は、[Galileo]の名前に由来があります。Gal の 1/1000 が[mGal]であって、携帯用重力計では 1/100mGal まで測定できます。

【注】「N」は重力の加速度の MKS 単位、「Gal」は cgs 単位。「Gal」は、小文字で「gal」と表示する場合もあります。

3.2 正規重力

以下、何の証明もなく、楕円体面の重力（γ）の式（3.2）を示します。このγは、正規重力と呼ばれているものです。ただし、γ_e：赤道及びγ_p：極の正規重力です。

$$\gamma_0 = \frac{a\gamma_e cos^2\varphi + b\gamma_p sin^2\varphi}{\sqrt{a^2 cos^2\varphi + b^2 sin^2\varphi}} \tag{3.2}$$

この展開式は式(2.5)に示されているγ_0です。

3.3 重力異常とジオイド

図 3.1 において、標高が既知の地表で、重力の測定によりgを得ます。標高が既知なので、ジオイド上のＰ点の重力g_Pを得ます。一方、楕円体上のＱ点の正規重力γ_Qが得られます。式(3.3)は、重力異常(Δg)です。

$$\Delta g = g_P - \gamma_Q \tag{3.3}$$

ジオイドは、地球の重力のつくる無数のポテンシャル W のうち、楕円体のポテンシャル U＝U_0 に等しい W_0 ＝U_0 で定義されています。すでに述べたとおりです。

PQ 間のポテンシャルを T とした場合、次式が成り立ちます。

$$T = N/\gamma_Q \tag{3.4}$$

この式(3.4)における T は、重力の乱れポテンシャルと呼ばれているもので、ジオイド高に比例する大きさ

で、ブルンスの式と呼ばれている物理測地学の基礎になる式です。

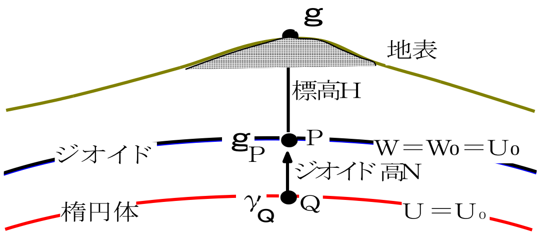


図 3.1　重力 g と正規重力 γ

図 3.2 に示すように、ジオイドの起伏は地球の地下構造を反映したものです。重力異常を地球全域にわたって積分した結果が、式（3.5）に示すストークス積分の式によるジオイド高で、物理測地学では、欠かすことのできない重要な式で、測地学の教科書では必ず記されています。

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma}\iint_{\sigma} \Delta g S(\varphi)\, d\sigma \tag{3.5}$$

ここに、R : 平均曲率半径$\sqrt{MN} \fallingdotseq 6371km$、$\gamma$: 地球全体の平均重力 ≒ 980.6Gal、$S(\varphi)$: ストークス関数です。この式は、若干厄介な式になりますが、**重力異常の積分を行うことによって、ジオイド高が計算できる**ことを意味しています。ここでは、これ以上の深入りは避けたいと思います（追補 2 参照）。

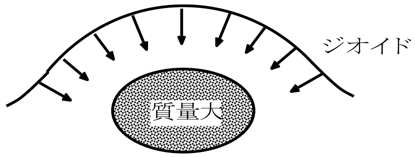


図 3.2　ジオイドの起伏と地下構造

図 3.3 は、ストークス積分による P 点のジオイド高（N）の概念図で、ジオイドの外側には質量がないものとしています。追補 2 における式(7)に示したラプラス方程式を満たすものです。山岳地では、ジオイドの外側に質量があるので、ジオイドの外側の山の質量をジオイド内に押し込めます。そのため、一般的に山岳地域におけるジオイドは、盛り上がっています。

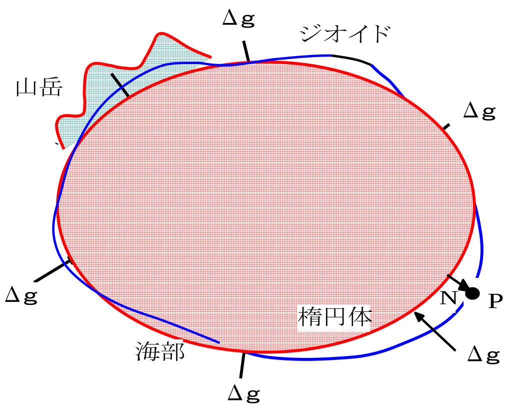


図 3.3　重力異常（Δg）とジオイド

3.4　重力の測定

重力の測定は、地上で行う場合と海上や衛星で行う場合があります。その他、最近行われている航空重力測定があります。

3.4.1　地上の重力測定

地上の重力測定は、絶対重力測定と相対重力測定があります。

絶対重力測定

真空中を自由落下する物体の落下距離x 、経過時間t の関係は、 物体の初期位置：x_0、初期速度：v_0 、重力加速度：gとして、式(3.6)で与えられます。

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \tag{3.6}$$

一般に、落体の初期位置、初期速度を正確に決めることは困難なので、x_0及びv_0を重力gと同時に３パラメータを決定することにすると、 落下中の 3 箇所以上で(x, t) を測定すれば、 これら 3 つの未知数を決めことができます。これが自由落下方式の基本的な原理です。

図 3.4　国土地理院が所有する 3 台の絶対重力計 FG5〔米国 Micro-g-LaCoste 社製〕の一つです。測定精度は、1～2μGal が得られるようになっています。これは、地球の重力の 10 億分の 1 に相当するものです。高さに換算すれば、3mm の分解能に相当します。

図 3.4　国土地理院が所有する 3 台の絶対重力計 FG5〔米国 Micro-g-LaCoste 社製〕の一つ

出典：国土地理院＜https://www.gsi.go.jp/buturisokuchi/grageo_gravitysurvey.html＞

相対重力測定

絶対重力測定に対して、相対重力の測定は、２点間の重力差を測定するものです。測定原理は、ばね秤の原理です。図 3.5 及び図 3.6 にその原理等が示されています。測定精度は 10μGal 程度で、高さに換算すると 3cm 程度になります。

相対重力測定には、振り子の周期が重力に比例することから、振り子の周期を測定する「振り子型重力計」を使うことができます。しかし、簡便軽量なばねばかり型相対重力計（図 3.6）が使われています。

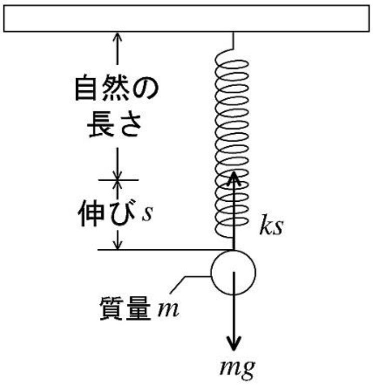


図 3.5　ばね測リ　　　　　　　　　　図 3.6　相対重力系（ラコスト重力系）

出典：測地学テキスト「Web テキスト測地学　新装改定版」

＜http://www.geod.jpn.org/web-text/part2/2-4/index.html#2-2＞

海上重力測定

地球表面の約 7 割が海で覆われています。式(3.5)に示すストークス積分公式によりジオイド高を求めるためには、海上の重力値は欠かすことはできません。

海上における重力測定は、船舶に重力計を設置して測るのですが、船舶の波浪や移動加速度による重力の変化の除去が必要になります。例えば、赤道上において船舶が東方向に移動する場合、地球自転による遠心力と同じ効果であるエトベス効果が生じ、船舶の移動速度が、1 ノット(約 1.8km/h)の場合約 7.5mGal にもなります。詳しくは、測地学テキスト 2-4-2. 重力測定をご参照下さい。

2002 年度の世界測地系への移行時、日本のジオイド 2000 がつくられました。このデータとして、陸上の 244,000 点に対して海上のデータ 578,000 点が使われました（安藤久他、2002)。

3.4.2　航空重力測定

写真は、1968 年頃筆者が国土地理院の重力測定を行っていた時のものです。南アルプスの横岳三角点に向かう筆者（左）と山頂での重力測定地中の筆者（右）です。山岳地域の重力分布を測定することは、大変な労力が必要になります。航空機による重力測定が可能になれば、山岳地域の重力分布が容易に測定できます。

図 3.7　八ヶ岳連峰 横岳（2830m）の重力測定に向かう筆者（左）、山頂で重力測定中の筆者（右）

航空重力測定では、 船と比較しはるかに速度が速いため、 エトベス補正がより複雑になるほか、 航空機の移動による地球の重力の変化も大きいものです。又、 高さが一定な海面上を航行する船と異なり、 飛行高度が変化する航空機上での重力測定では、精密な高度の測定も必要となります。これらを補正するために、航空重力測定では、重力値とともに、航空機の動揺や 3 次元的な位置を高精度で計測する必要があります。航空重力測定で最も困難なのは、 実は、この位置の測定であり、 航空重力測定が真に実用化されるようになったのも、 精密 GNSS 測位を用いた航法システムが出現して以後のことです。

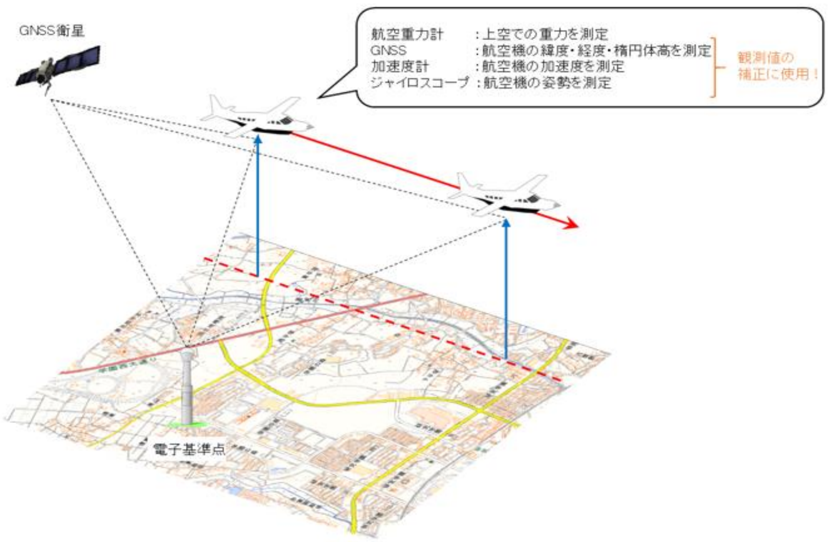


図 3.8 航空重力測量のイメージ

出典：国土地理院＜https://www.gsi.go.jp/buturisokuchi/grageo_ags.html＞

3.4.3 衛星による重力測定

地球の 7 割が海洋なので、地上重力は、地球の 3 割程度の範囲でしか測定できません。式(3.5)に示すように、ジオイド高（N）は、地球全体の重力異常を積分して決められるものです。地球の表面積の 7 割を占める海洋の重力異常がどうしても必要になります。それは、海上重力の他、衛星測位による軌道解析によって、決められます。追補 2 の摂動などをご参照ください。

衛星測位による重力の測定は、図 3.9 に示すように、地球内部の不均衡な密度分布により、衛星軌道が変化することです。人工衛星の軌道と速度は、 地球の重力ポテンシャルの強弱に応じて変化します。重力ポテンシャルが強い領域では、地球の引力が強くなるため、衛星の軌道は降下し、速度は加速します。一方、重力ポテンシャルが弱い領域では、地球の引力が弱くなるため、衛星の軌道は上昇し、速度は減速します。 このように、衛星軌道を解析することにより、地球の重力場を推定できるのです。

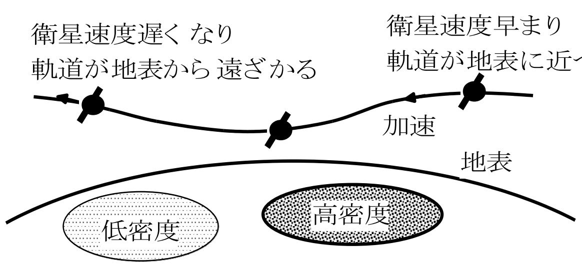


図 3.9 衛星軌道と地球の重力の関係

衛星軌道解析

人工衛星を使った地球重力場の計測は、1957 年に旧ソ連が打ち上げた Sputnik 衛星によって初めて実現されました。それは、図 1.4 に示すように、地球のジオイドは、西洋梨型をしているというもので、筆者の一人は、半世紀昔の衛星測地学の成果を強く印象に残しております。

このように、人工衛星の軌道と速度が、地球の重力ポテンシャルの強弱に応じて変化することを利用し、地球重力場を導き出します。

衛星速度の変化（GRACE）

GRACE(Gravity Recovery And Climate Experiment)は、 2002 年 3 月 17 日からアメリカ航空宇宙局(NASA)とドイツ航空宇宙センター(DLR)が共同で実施している人工衛星による地球重力場の観測ミッションです。

衛星間距離は、重力ポテンシャルの強弱に応じて伸縮するため、その変化を計測することで地球重力場を復元することができます。2 つの衛星 A 及び B は、高度約 500 km の同じ軌道上を約 220 km 離れて周回します。図 3.10 に示すように、地球の高密度層に達する衛星 A は、速度を増し、衛星 B との間隔が広がり、その距離 S は長くなります。

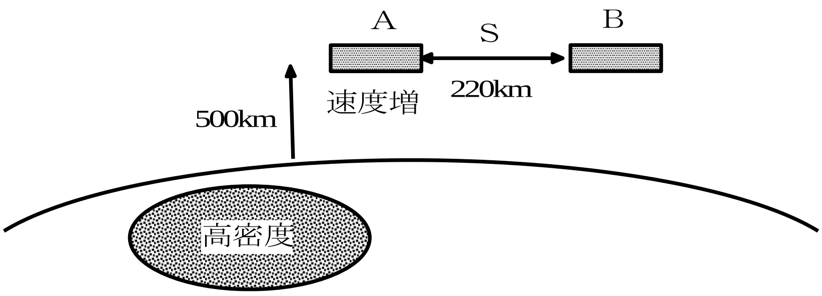


図 3.10　GRACE の原理

衛星アルチメトリ（Satellite Altimetry）

衛星による地球の重力を測定する方法として、図 3.11 に示すように人工衛星から海面形状を測定し、図 3.11 に示すようにその鉛直線偏差から、重力異常を求めます。衛星アルチメトリ(Satellite Altimetry)と呼ばれている方法です（David 他、1997)。

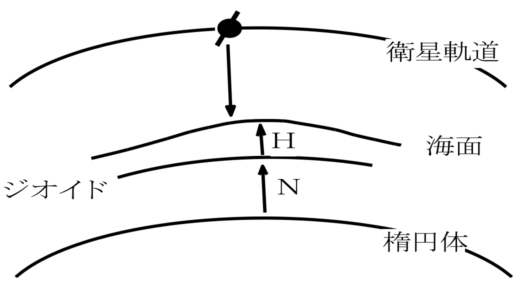


図 3.11　海面の鉛直線偏差、N：ジオイド高、H：海面地形

3.5　EGM (Earth Gravitational Model)

WGS 84 は、座標系、楕円体及び EGM から成り立つ総合的システムです。

WGS 84　EGM84

ここに示された EGM は、式(3.7)で表されています。以下、The Defense Mapping Agency（1987）から引用してあります。

$$\mathrm{V} = \frac{GM}{r}\left[1 + \sum_{n=2}^{n_{max}} \sum_{m=0}^{n} \left(\frac{a}{r}\right)^{n} \bar{P}_{n,m}(sin\phi^{'})(\bar{C}_{n,m}\cos m\lambda + \bar{S}_{n,m}\sin m\lambda)\right] \tag{3.7}$$

ここに、V: 重力ポテンシャル関数、GM:地心引力定数、r: 地球重心からの半径ベクトル、a: WGS 84 楕円体の長半径、n ・m: 次数・位数、$\phi^{'}$: 地心緯度、λ: 地心経度、$\bar{C}_{n,m}$及び$\bar{S}_{n,m}$: 正規化された重力係数、$\bar{P}_{n,m}(\sin\phi^{'}) = [(n-m)!\,(2n+1)k/(n+m)!]^{1/2}P_{n,m}(\sin\phi^{'})$: 正規化されたルジャンドル陪関数、$P_{n,m}(\sin\phi^{'})$: ルジャンドル陪関数です。EGM84 では、$(n,m)_{max}$ =180 です。

（参考）V: 重力ポテンシャル関数に関しては、末尾の追補２ポテンシャル論の(24)等をご参考下さい。

3.6　東京湾平均海面

図 1.3 において、ジオイドはW_0で定義されています。実際には、現在のところ正確なW_0 を決めるのは困難で、各国とも平均海面(Mean Sea Level: MSL)をジオイドに見立ててそこを基準にして陸地の標高を決めています。日本においても、測量法第 11 条は、“高さは、平均海面からの高さで表示する。” と定め、“測量の原点は、日本水準原点とする。” と定めています。この条文を受けて、同法施行令第 2 条は、日本水準原点の位置を “東京都千代田区永田町一丁目一番地” と定めています。続けて、施行令第 2 条は、既に述べましたように、日本水準原点の標高を “東京湾平均海面上、24.3900m” と定めています。

海面形状は、凹凸が大きく、オーストラリア大陸では水準測量の成果と最大 1 m 程度の食い違いが生じます。すなわち、世界各国の標高は、１m 程度以内の正確さで決めることは困難なのです。

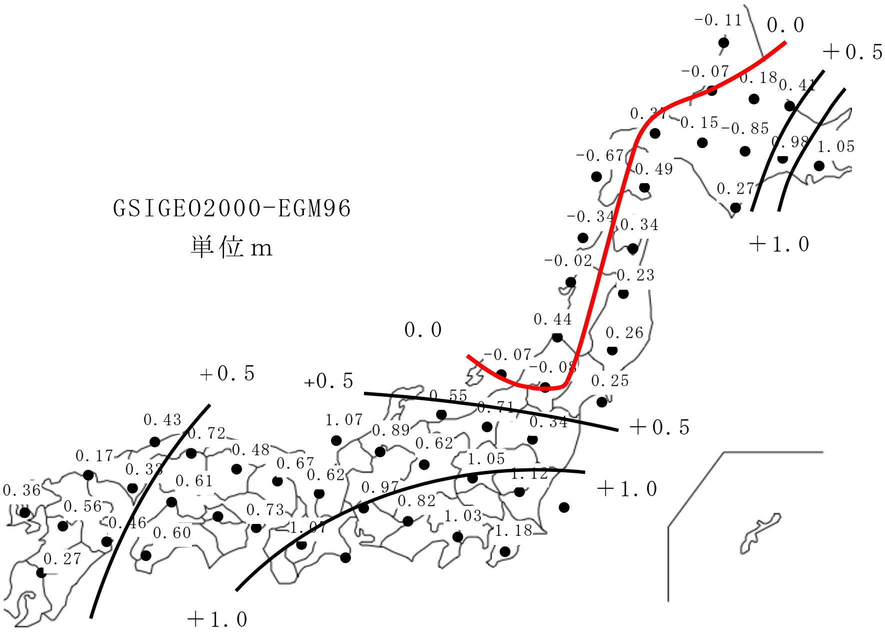


図 3.12　GSIGEOID2000 と EGM96 のジオイド高の（1°×1°格子点）の差

図 3.12 は、GSIGEOID2000 と EGM96 のジオイド高の差を示したものですが、東京湾では 1m 余りの食い違いがあり、全体でも大きいところでは 1m 余りの食い違いが生じていています。

EGM96、EGM2008

1996 年から、WGS84EGM84 を更新した WGS84EGM96 が使われてきています。WGS84EGM96 の次数・位数 n=m＝360、最小分解能は 30′ ×30′ で、WGS84EGM84 より分解能が高まっています。2002 年度からの世界測地系導入にあたり、ここで使われた日本のジオイド 2000 の基礎となる全地球ポテンシャルモデルとして、この WGS84EGM96 が使われました（安藤久他 (2002)：日本のジオイド 2000 の構築、国土地理院時報 No97.）。

その後、次数・位数 n=m＝2159 と格段に分解能が高まった EGM2008 が開発されました。分解能は、EGM96 の 6 倍で 5′×5′ になります。日本では、使われていませんが、ニュージーランドのジオイド・モデル NZGeoid2009 には、EGM2008 が使われていました。

4．ジオイド(Geoid)モデルの構築

既に、[1.3]において、ジオイドについて述べました。本章では、ジオイドを求める方法について、解説します。

前に示した式(3.5)は、ジオイド高を求めるストークス積分です。地球全域にわたる重力異常が既知でなければならず、衛星測位による全地球の重力が測られるまでは、このストークス積分からのジオイド高を求めることは不可能でした。

4.1　天文測地ジオイド

地球全域の重力異常を基にしたストークス積分によるジオイド高の計算が不可能な時代、陸地の鉛直線偏差の観測だけで決められる天文測地ジオイド高が使われました。我が国最初の鉛直線偏差の結果は、熱海(Atumi, 1933)により報告されています。この報告によれば、樺太３点、千島列島２点、沖縄列島２点を含む合計 68 点の観測結果から、日本経緯度原点における鉛直線偏差の偏りが、緯度方向$\xi = +9.46''$ 及び経度方向$\eta = -9.35''$ であることを明らかにしました。

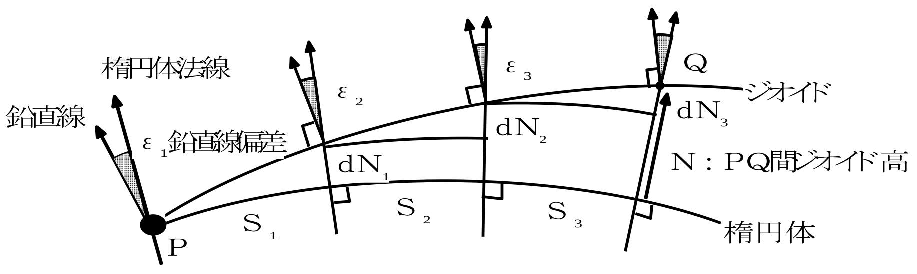


図 4.1　天文測地水準測量（PQ 間のジオイド高$\mathrm{N} = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i S_i$）

天文測地ジオイド高の原理は、図 4.1 に示すように、天文測地水準測量（astrogeodetic leveling）によって決められます。PQ 間のジオイド高 Nは、εを鉛直線偏差として、式(4.1)で与えられます。

$$N = S_1\varepsilon_1 + S_2\varepsilon_2 + S_3\varepsilon_3 \qquad (4.1)$$

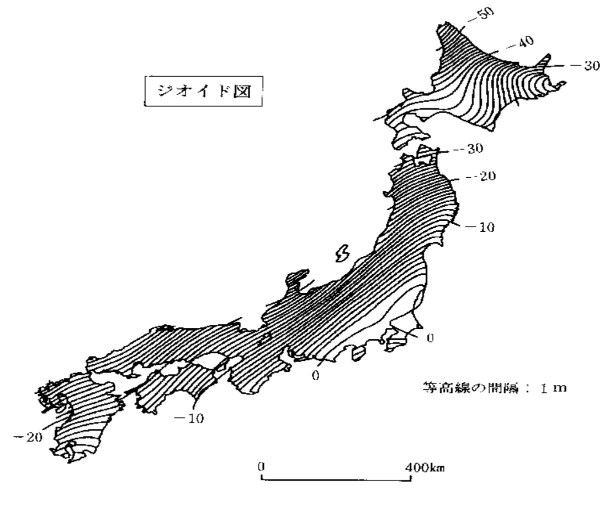


図 4.2 天文測地ジオイド高（西,1981）

国土地理院は、戦後の 1947 年から 1992 年にかけて 454 箇所における天文観測を実施しました。これらの結果の一部に基づく天文測地水準による天文測地ジオイド(astrogeodetic geoid)の決定（西,1981）がありま

す（図 4.2)。この天文測地ジオイド高は GPS 測量の基線解析に使う WGS 84 座標系への座標変換時に使われる楕円体高の算出のもので、日本の初期の GPS 測量の実用化に大きな貢献をしました。

4.2　GNSS／水準ジオイド

ジオイド高 N と標高 H を加えた値は、楕円体高 h になります。従いまして、標高 H の既知点である水準点上において、GNSS 測量を行い、楕円体高 h を測れば、ジオイド高 N（＝楕円体高 h－標高 H）が求まります。GNSS／水準と呼ばれています（図 4.3)。

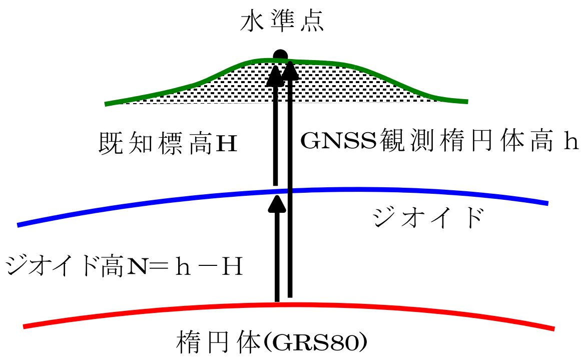


図 4.3　GNSS／水準

4.3　日本のジオイド

測地測量のための実用的な日本の最初のジオイド・モデルは、日本のジオイド 96 でした。その後、2002 年度施行の世界測地系対応の日本のジオイド 2000 及びその改良版の日本のジオイド 2011 となってきています。

4.3.1　日本のジオイド 96

日本のジオイド 96（国土地理院、2003）は、3′×3′の格子点上にジオイド高が与えられていて、日本における最初の実用的な日本のジオイド・モデルです。その内容は、国土地理院 Website (2015 年 4 月時点) において、次のように解説されていました。

> 国土地理院では，1993 年に人工衛星観測による全地球ジオイド・モデルと，日本の重力測量データ及び近海の海上重力測量データを使い，球面近似のＦＦＴ法によるストークス積分で，日本付近のジオイド（JGEOID93）を算出した。GPS 測量と水準測量を組み合わせた検証によって，このモデルは短周期成分の精度は高いものの，長周期成分に若干の系統差をもっていることが分かった。
>
> この系統差を取り除き，より高精度のジオイド・モデルを構築する目的で，1995 年に日本全国の約 900 点の水準点上 GPS 観測を実施した。観測は，ジオイドの長周期の傾斜補正を目的として約 20km 間隔で行われ，その結果は，全国の電子基準点（GPS 連続観測点）の観測データと共に解析し，約 900 点の実測ジオイド高データが得られた。
>
> 国土地理院は，1996 年に JGEOID93 をこの実測ジオイド高データにより補正して，新しいジオイド（日本のジオイド 96）を決定した。

4.3.2　日本のジオイド 2000

日本のジオイド 2000 は、2002 年度から施行された世界測地系対応の日本のジオイド・モデルで、1′×1.5′（約 2km×2km）の格子点にジオイド高が与えられていました。このジオイドは、国土地理院（2003、第 4 部）発行の測地成果 2000 によって詳しく説明されています。以下は、その資料を中心にして日本のジオイドにつ

いて考察します。

GSIGEO2000 ジオイド・モデルの概要

測量法の改正に伴い日本の測地原子として世界測地系が 2002 年度から採用され、既に述べましたように、国土地理院はそれに必要な日本のジオイド 2000（GSIGEO2000）を公開しました。この日本のジオイド 2000 は、日本周辺の重力ジオイド・モデル JGEOID2000 と GPS／水準によるジオイド高を統合処理して構築されたものです。

日本周辺の重力ジオイド・モデル「JGEOID2000」

日本の陸地及び周辺海域の稠密な重力データを使って、日本周辺の重力ジオイド・モデル JGEOID2000 が開発されました(Kuroishi,2001)。その主な内容は以下のとおりです。

①参照となる全地球ポテンシャルモデル：EGM96

②座標参照系：ITRF94（エポック 1997.0）

③測地基準系：GRS80

④計算手法：球面近似ストークス積分

⑤重力データ陸上：244,599 点、海上：578,265 点

⑥重力の地形補正用標高データ：国土数値情報 250mメッシュ標高データ

⑦重力ジオイドデータ分解能：緯度 1 分×経度 1.5 分グリッド

ここで得られた重力ジオイド・モデルは、短波長成分において高い精度をもつと考えられています。一方、全地球ポテンシャルモデルや海域の重力場モデルに含まれる系統誤差に起因して、中・長波長成分に誤差を含むと考えられています。

日本のジオイド 2000 と GNSS／水準

2002 年度に世界測地系が導入されて以来、日本のジオイド 2011 が公開されるまで、日本のジオイド 2000 が使われてきました。日本のジオイド 2000 の実測ジオイド高は水準点上で行われたことです（図 4.4）。平均較差－0.3m、最大較差は根室半島＋23.8cm、最小較差は佐多岬半島－35.8cm、標準偏差 4.0cm で、品質はかなり落ちます（安藤久他、2002）。

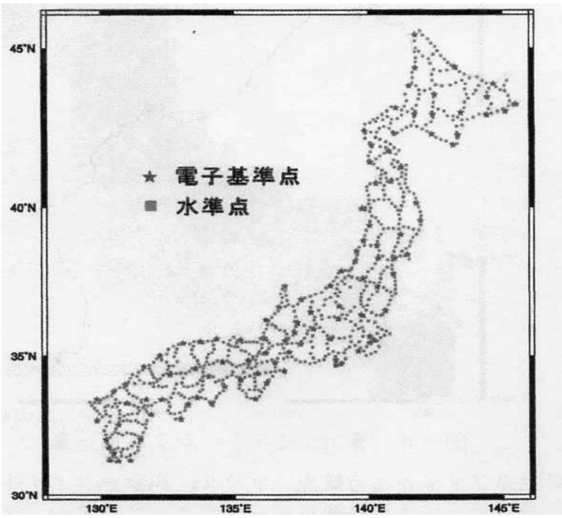


図 4.4　日本のジオイド 2000 の GNSS／水準観測点、安藤他(2002)

水準点標高は、2000 年度平均成果を使ってあります。2000 年度平均成果は、次のように構築されています。

① 基準原点：測量法第 11 条及び同施行令第 2 条に定められた原点数値 24.4140m
② 高さ：ヘルメルト正標高 (Helmert orthometric height)
③ 水準測量データ：1986 年－1999 年間の全国一等水準測量約 21,000 点及び４つの海峡における渡海水準測量データ
④ データの調整：全国同時網平均計算
⑤ 重力の補正：観測重力に基づく正標高補正 (orthometric correction)
⑥ 計算結果の精度： 日本水準原点１点だけが固定されているため、原点から離れるにしたがって誤差は大きくなっている。その誤差の推定量は、北海道東部及び北部 40～45mm、九州南部 35～40mm
⑦ 離島：最新の観測データにより処理

上記によって得られた水準点のうち、約 800 点で GNSS 観測を行い、GNSS／水準によるジオイド高 N を求めてあります。

重力ジオイド高と GNSS／水準によるジオイド高の統合処理

重力ジオイド JGEOID2000 は、GNSS／水準によるジオイドとの統合処理により、中・長波長成分の誤差が修正されます。また、測量法第 11 条に定められた高さに準拠した日本の高さの基準として使えるジオイド高となります。JGEOID2000 と GNSS／水準によるジオイドとの統合は、「最小２乗コロケーション法（Least Squares Collocation：LSC）」により処理されています（Kuroishi, Ando, Fukuda, 2002、安藤他,2002）。なお、離島のジオイド・モデルは、島内で決定されている標高及びジオイド高に基づいて、個別に決定されています。

GSIGEO2000 の精度

約 800 箇所における JGEOID2000 と GNSS／水準によるジオイドとの較差から、GSIGEO2000 の精度評価ができます。

① 較差から求めた標準偏差は、4.0cm である。
② 最大較差は、北海道の根室半島の点で、＋23.8cm である。
③ 最小較差は、四国西部の佐田岬半島の先端の点で、－35.8cm である。
④ 較差の平均値は、－0.3cm である。この結果は、GSIGEO2000 と JGEOID2000 のジオイド高の間にはほとんどバイアスがないことを示している。

4.3.3　日本のジオイド 2011

国土地理院は、2014年4月1日、日本のジオイド2011（Ver.1）を公開しました。1′×1.5′格子点上にジオイド高が与えられています。兒玉他 (2013) を基にその概要を解説します。最新版は日本のジオイド2011 (Ver.2.1) です。

GNSS／水準ジオイド高

国土地理院が実測ジオイド高と呼んでいる GNSS／水準観測点は、図 4.5 に示すものです。電子基準点約 1,300 点の約 6 割にあたる 786 が水準測量により標高が決められています。標高既知点は、電子基準点の他 156 点の水準点及び 29 点の験潮場を含め全体で 971 箇所になります。日本のジオイド 2000 の水準点分布（図 4.4）と比較して、面的な分布になっていて、品質向上が見て取れます。

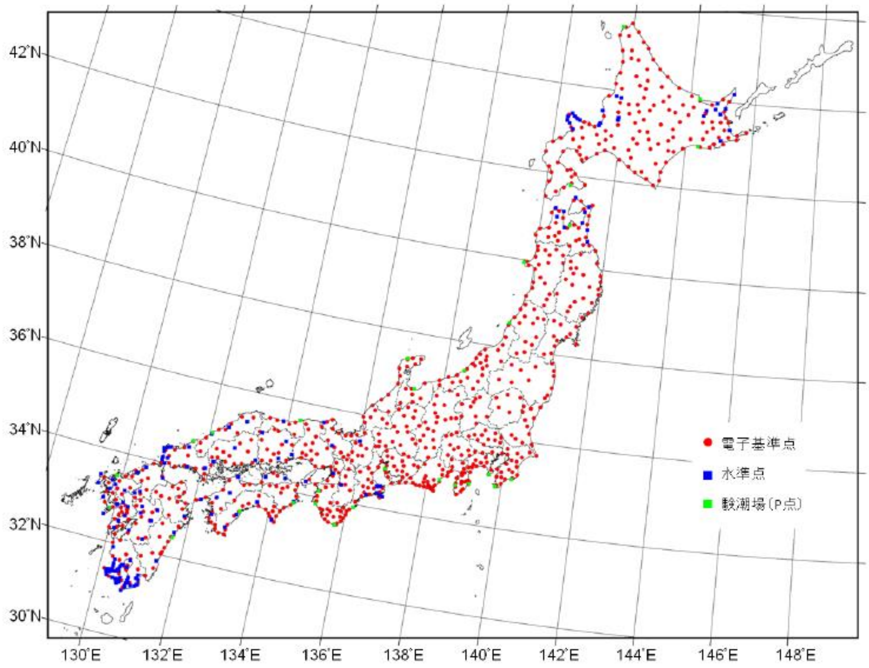


図 4.5　日本のジオイド 2011（Ver.1）に用いた GNSS／水準観測点 971
（児玉篤郎他、2013による）

図4.6は、日本のジオイド2011 (ver.2.0)です（小板橋他、2018）。山岳地域でジオイドの盛り上がりを示し、海部での凹みを示しています。

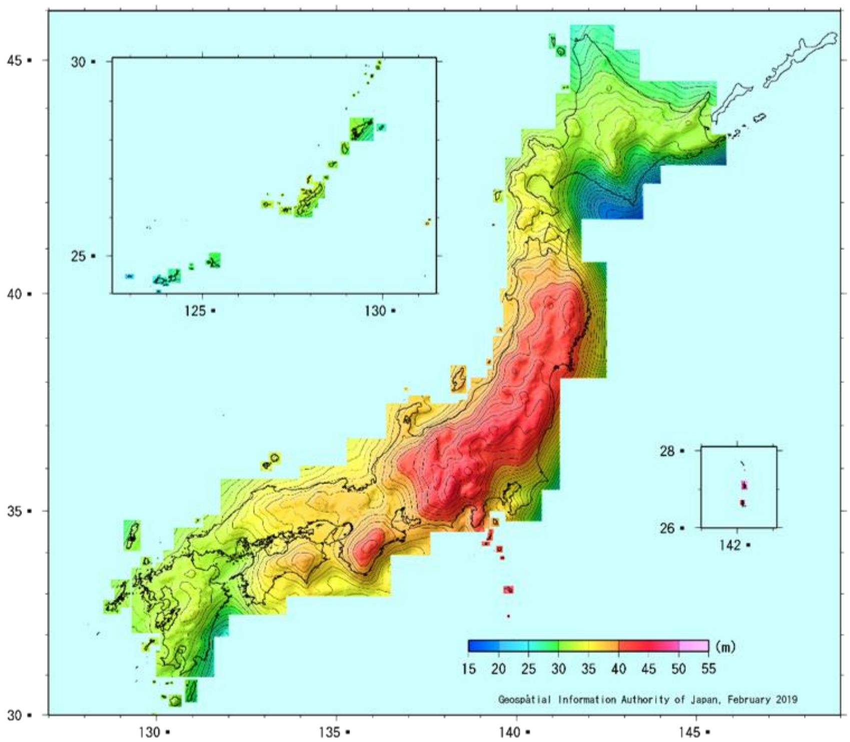


図4.6　日本のジオイド2011 (ver.2.0)：山岳地域のジオイド高が高い
出典：国土地理院＜https://www.gsi.go.jp/buturisokuchi/grageo_geoidseika.html＞

重力ジオイド高（JGEOID2008）

日本のジオイド 2011 に使われた重力ジオイド高は、JGEOID2000 を改良した「JGEOID2008」が使われています。その詳細は、Kuroishi（2009）を参照下さい。

混合ジオイド・モデル

図 4.5 に示す GNSS／水準による実測ジオイド高は、点間距離が 20km 程度の離散的なもので、そのままでは公共測量などに使えません。重力ジオイド高は、約 2km×2km の格子点上の値として密に分布していますが、測量法上の標高との関連が明確でなく、そのままでは公共測量などに使えません。国土地理院は、実測ジオイド高と重力ジオイド高を最小２乗コロケーション法により結合したジオイド・モデルを混合ジオイド・モデルと呼び、日本のジオイド 2011 としています。

4.4 擬ジオイド(quasigeoid)

図 4.7 に示すように、地上 P 点における地球の重力が作るポテンシャルを W_P とします。一方、W_P に等しい正規楕円体がつくるポテンシャルを $U_Q＝W_P$ とし、その点を Q とします。QP 間の長さ ζ が、ハイトアノマリー（ζ）と呼ばれています。ジオイド高 N に近いハイトアノマリーが擬ジオイド高になります（付録 2、図 11 参照）。

ジオイド高 N は、地球内部の重力を必要とし、そのために地殻の密度を仮定しなければならない不分明なものです。それに対して、擬ジオイド高ζ（ハイトアノマリー）は、地表面の重力測定結果から、何の仮定もなく計算できます。そのため、最近は、この擬ジオイド高が使われる傾向にあります。なお、正標高 H^O 及び擬ジオイド高に基づく正規高 H^N については、次章で述べます。

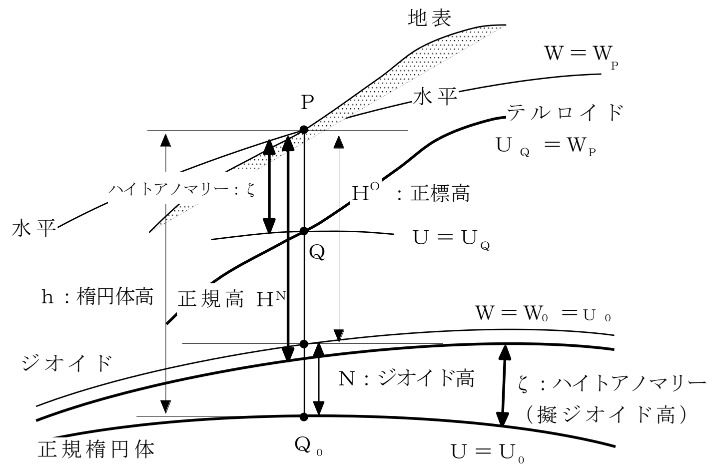


図 4.7 ジオイド高 N、正標高 H^O、擬ジオイド高ζ、正規高 H^N

図 4.8 は、ニュージーランドにおける擬ジオイド（NZGeoid2016）と従来の平均海面をジオイドと見立てたローカルジオイドからの標高を示した Converting between NZVD2016, NZGD2000 and local vertical datums で検索したものです。

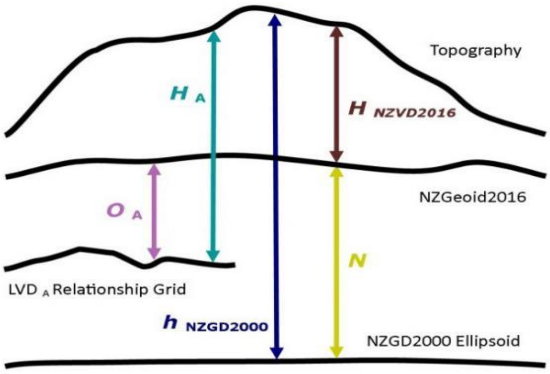


図 4.8　ニュージーランドにおけるジオイドと標高の関係

LINZ　Website による

4.5　鉛直線偏差

図 4.9 に示すように、楕円体法線を基準にした鉛直線の傾きが鉛直線偏差です。鉛直線偏差は、天文測量から得られた天文鉛直線偏差(ξ^A, λ^A)と重力の測定から得られた重力鉛直線偏差(ξ^0, λ^0)があります。ただし、ξは南北方向の成分で北方向が正及びλは東西方向の成分で東方向が正です。これらは、近似的に式（4.2）で表されます。ただし、(Φ, Λ)：天文緯度経度及び(φ, λ)：測地緯度経度です。

$$\xi = \Phi - \varphi$$

$$\eta = (\Lambda - \lambda)\cos\varphi \qquad (4.2)$$

天文方位角 A 及び測地方位角α並びに観測天頂角z'及び測地天頂角 z とすれば、ラプラスの式と呼ばれる式(4.3)が導かれます。

$$A - \alpha = (\Lambda - \lambda)sin\varphi + (\xi sin\alpha - \eta cos\alpha)cotz$$

$$z = z' + \xi cos\alpha + \eta sin\alpha \qquad (4.3)$$

測量法第 11 条は、“距離及び面積は回転楕円体の表面上の値で表示する“と定めています。トータルステーションは、図 4.11 に示すように、鉛直線方向に整置されます。従いまして、式(4.3)に示したラプラスの式により、観測方向及び観測高低角は、楕円体面の位置に化成しなければなりません。

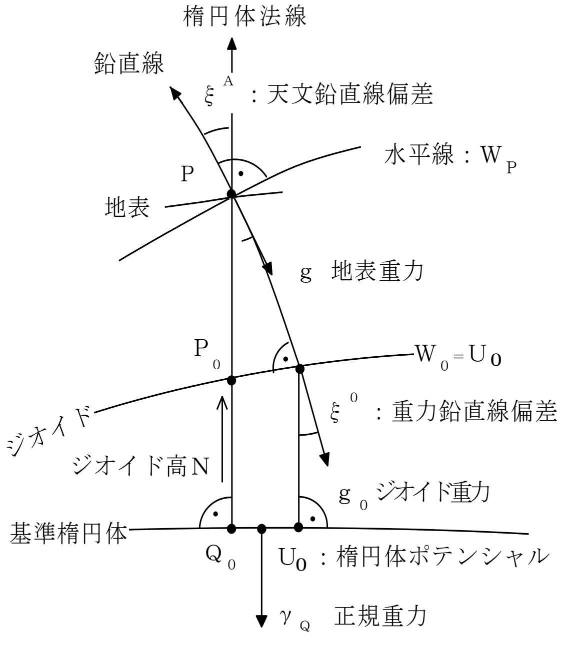


図 4.9　鉛直線偏差

公共測量で使う作業規程の準則別表 1 測量機器級別分類表の中に機器性能として「水平気泡管及び高度気泡管公称感度（秒／目盛)」とあります。１級の場合水平及び高度共に（10 秒／1 目盛）です。これは、TS の鉛直軸の傾き誤差が、地球の重力がつくる鉛直線への合致誤差が 1 目盛りで 10 秒になることを示していると理解できます。

実際の鉛直線偏差は、日本のジオイド96から東西及び南北方向の微分によって求めたものが図4.10（中根、2002）に示されています。東京付近は10秒を超える鉛直線偏差です。この影響は、例えば、スカイツリー付近の鉛直線偏差は 18″程度なので、高さ634m×18″/206265″＝5.5cm が傾きによる塔の頂点の位置のずれになります。国土地理院は、鉛直線偏差の位置に及ぼす影響は小さいとして、この影響を考慮していません。

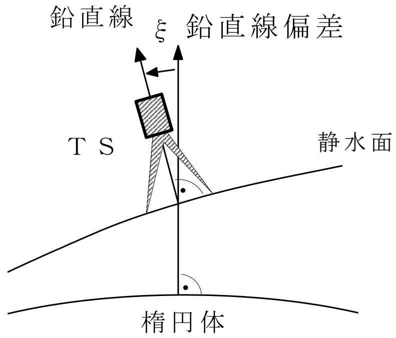


図4.10　TSの鉛直軸誤差（ξ）

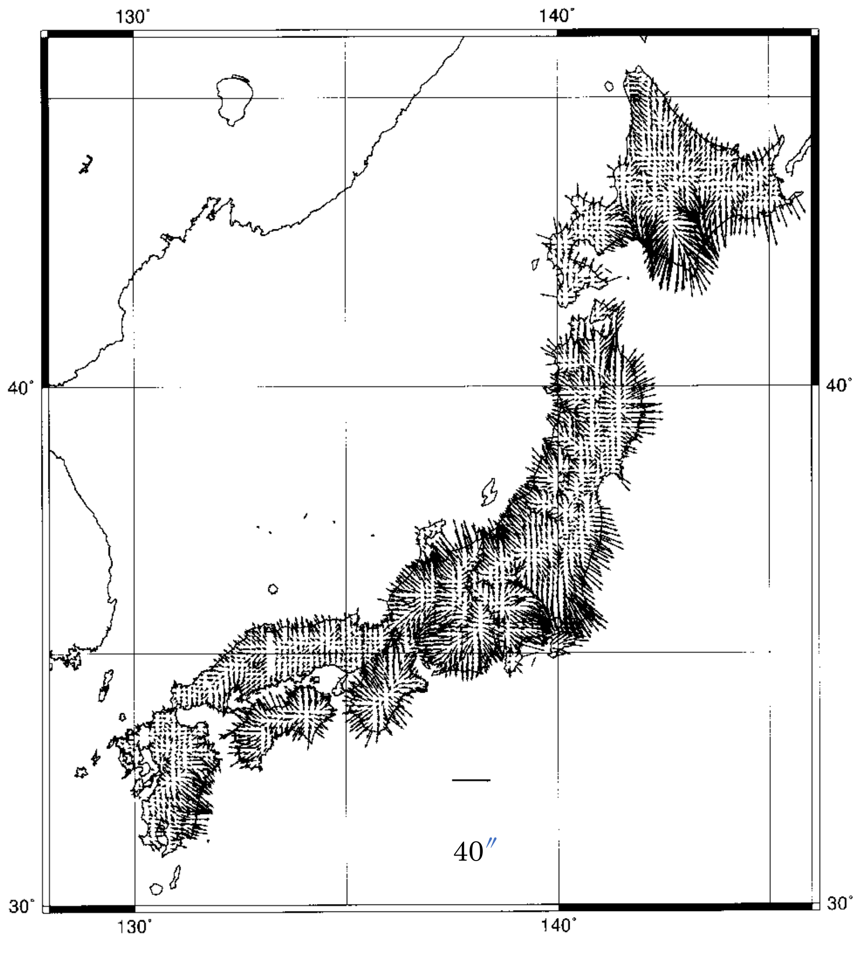


図 4.11　日本のジオイド 96 から求めた（5′ ×7.5′ ）格子点上の重力鉛直線偏差
中根（2002）による

作業規程の準則第 37 条は、標高の取り付けとして 500m までは、楕円体高の差を高低差とすることができる、と規定しています。同条に規定された鉛直角の読定単位は、10″ ですから、楕円体比高を使った場合、鉛直角誤差が 10″ を超える地域においては、読定単位（10″ ）を超えて好ましくありません。

５．　標高

図 5.1 は、現在国土地理院が管理する約 1.3 万点からなる一等水準路線です。主要国道沿いに水準点が設

置されています。地殻変動や地盤変動などによる高さの変化を監視するため、明治以来、9 回の繰り返し測量が行われてきました。この路線全体を一巡するに要する測量時間は、約 10 年と言われています。10 回目は途中で中断しました。望遠鏡による従来の水準測量は、非効率であるからでしょう。これからは、効率の良い GNSS 測量による高さの変動の監視が行われるようになるでしょう。

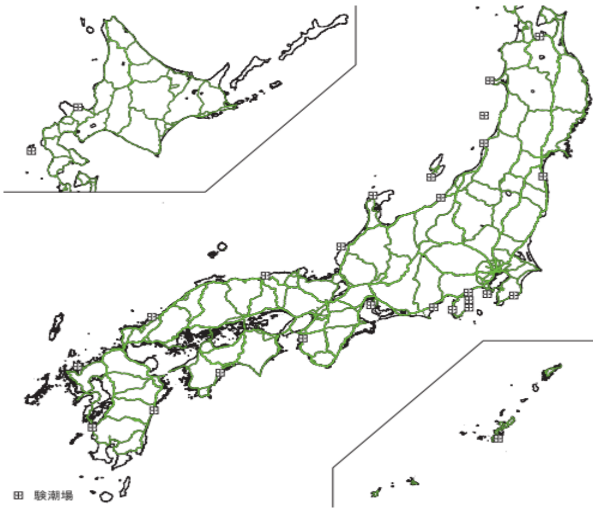


図 5.1　一等水準網図

出典：国土地理院＜https://www.gsi.go.jp/sokuchikijun/suijun-survey.html＞

5.1　標高の定義

図 5.2 に示す標高 H_Pは、ジオイドから鉛直線に沿った曲線の長さで定義されています。ジオイドの上方が正値になります。図 5.3 において、P 点と Q″点の標高は等しく、ジオイド面と等高面は、近似的に互いに平行な面と言えます。それに対して、ジオイド（P_0Q_0）面と等ポテンシャル（PQ）面は平行でありません。PQ 点は等ポテンシャル面で、この面は水の動きがない静水面です。しかし、Q′点は、P 点より標高が低いにも関わらず、P 点よりもポテンシャルが高いので、標高の低い Q′ 点から標高の高い P 点方向に水が流れます。

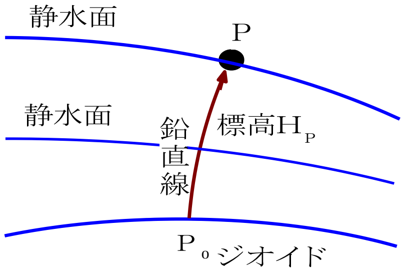
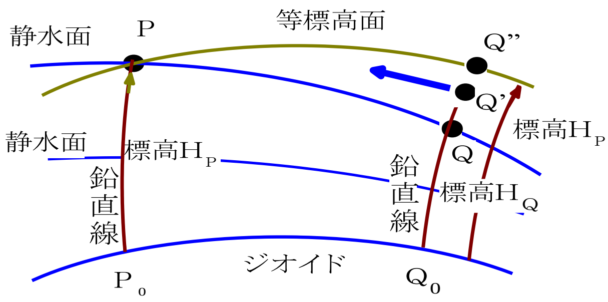


図 5.2　標高H_Pの定義



5.3　標高の低い（Q’）方から高い（P）方への水の流れ

水は、標高の高い方から標高の低い方へ流れるというのは、測地学では正しい記述ではありません。標高の理論的定義では、**標高の低い方から標高の高い方へ水が流れる**こともあるのです。

5.2　地上水準測量により標高を測る

水準測量の原理は、図 5.4 に示すように、約 100m離れたところに目盛りの付いた標尺を立てます。その中間に水準儀をおいて、両標尺の目盛り a 及び b を読み、その差$\Delta H = a - b$が 2 点間の高低差になります。

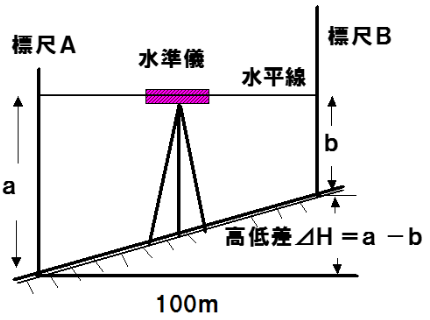


図 5.4　水準測量の原理

5.2.1　正規正標高(normal orthometric height)

地球の重力場が、式(2.1)、式(2.2)及び式(2.3)に示すような一様な場合、水準比高に式(2.4)、及び式(2.6)に示す楕円補正を行った場合の高さになります。図 5.5 に示すように、等ポテンシャル面の非平行性による僅かな補正を行うものです。

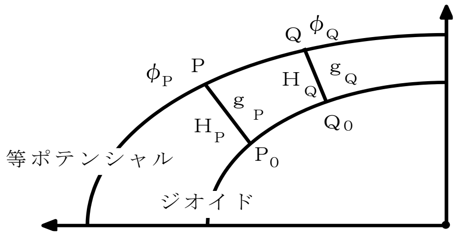


図 5.5　楕円補正

昭和 4（1929）～5（1930）年頃から昭和 49（1973）年まで、式(2.1)に示す 1884 年ヘルメルト標準重力が使われました。PQ 点のポテンシャルは、等しいので、$H_P g_P = H_Q g_Q$が成り立ち、式（5.1）が成り立ちます。この高さは正規正標高と呼ばれています。

$$\frac{H_P}{H_Q} = \frac{g_Q}{g_P} = \frac{1 + 0.00531 sin^2 \varphi_Q}{1 + 0.00531 sin^2 \varphi_P} \tag{5.1}$$

$\therefore H_Q - H_P = \ dH = -0.00531\left(sin^2\varphi_Q - sin^2\varphi_P\right)H_Q$

$H = \left(H_P + H_Q\right)/2 \quad\quad \varphi = \left(\varphi_P + \varphi_Q\right)/2$ とすれば、又、$\left(\varphi_Q - \varphi_P\right)$が小さいとすれば、

$dH = -0.00531 \sin 2\varphi \sin\left(\varphi_Q - \varphi_P\right)H = -0.00531 \sin 2\varphi\left\{\left(\varphi_Q - \varphi_P\right)/\rho'\right\}H$

ここで、dHをmm単位で表せば、楕円補正は、式（5.2）で表されます。

$$dH = -0.00531 \sin 2\varphi \left(\varphi_Q - \varphi_P\right)/\rho' H \tag{5.2}$$

5.2.2　ヘルメルト正標高（Helmert orthometric height）

20 世紀も半ばすぎると、携帯重力計が開発され、地球の陸地の重力分布が詳細に測られるようになりました。重力測定から、図 5.6 及び式(5.3)に示すように PQ 間のポテンシャル$C_{PQ} = W_Q - W_P$が測定されます。ここに、C_{PQ}はジオポテンシャルナンバー(geopotential number)と呼ばれています。水準比高と平均重力の積の総和になります。

$$C_{PQ} = W_Q - W_P = dH_1\left(g_P + g_1\right)/2 + dH_2\left(g_1 + g_2\right)/2 + dH_1\left(g_2 + g_3\right)/2 + dH_1\left(g_3 + g_Q\right)/2 \tag{5.3}$$

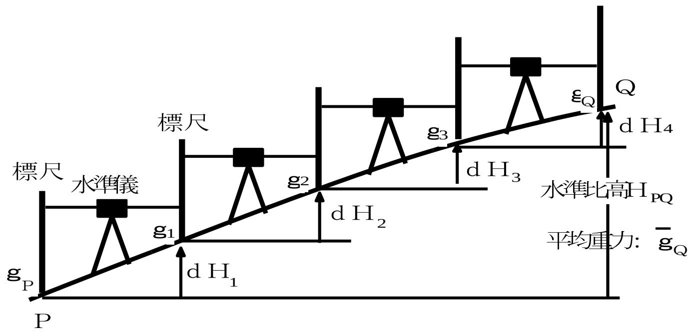


図 5.6　水準測量

Q 点の標高H_Qは、Q 点のポテンシャルC_{PQ}を Q 点の平均重力$\bar{g}_Q$で割った式(5.4)で表され、ヘルメルト正標高と呼ばれています。日本では、2002 年度からの世界測地系の導入に伴って、正規正標高に取って代わって導入されました。

$$H_Q^O = C_{PQ}/\bar{g}_Q \tag{5.4}$$

ここに、平均重力$\bar{g}_Q$は、Q 点の地殻密度により決められるもので、$\bar{g}_Q = g_Q + 0.0424H_{PQ}$で与えられます。従いまして、Q 点の内部の地殻密度が正確に分からないと正確なH_Q^Oは、求められません。

5.2.3　正規高 (normal height)

式(5.4)で示されたヘルメルト正標高は、正確に決められる高さではありません。そこで、地殻の密度の仮定などいかなる仮定を設けず、地上の観測値からの計算で一意に定まる高さが正規高で式(5.5)に示されます。

$$H_Q^N = C_{PQ}/\bar{\gamma}_Q \tag{5.5}$$

ここに、$\bar{\gamma}_Q$ は、正規鉛直線(normal plumb line)に沿った Q 点の平均正規重力で、$\bar{\gamma}_Q = \gamma_Q - 0.3086\left(H_{PQ}/2\right)$で与えられます。0.3086 は、重力の鉛直勾配で単位は(mGal/m)で与えられています。

正規高は、現代測地学の成果と言われていて、ヨーロッパで使われています。又、最近では、ニュージーランドでも使われています。

5.3　国際高さ基準座標系（International Height Reference Frame：IHRF）

各国の標高の基準であるジオイドは、平均海面を使っています。日本は、測量法で「東京湾平均海面」をジオイドに見立てています。海面地形は、時間的変化も大きく、世界的に統一した平均海面を 1*m* 以内の正確さで決めることは、困難です。

測地研究者の国際組織である IAG（国際測地学協会）は、2015 年に国際高さ基準座標系（International Height Reference Frame：IHRF）に関する決議を採択しました。その内容は、① 鉛直座標系の基準面は、ポテンシャル値が W_0 （ジオイド上）となる等ポテンシャル面とする（W_0=62636853.4m^{2}s^{-2} と定める）。② 観測値やパラメータは、Mean tidal system/mean crust（平均潮汐・平均地殻）に準拠する。③ 長さと時間の単位はメートルと秒（SI 基本単位）。④ 点 P の位置を ITRF で $\boldsymbol{X}=(X,Y,Z)$とすると、P でのポテンシャル値は $W_P=W(\boldsymbol{X})$であり、P の鉛直座標をジオイドとのポテンシャルの差（重力ポテンシャル数）$C_P=W_P-W_0$ と定義します（式 5.3、図 5.7)。

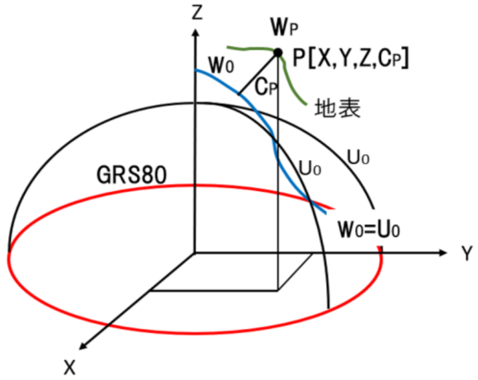


図 5.7　$C_P=W_P-W_0$ による高さの定義

GNSS 測位時代の将来には，現在の平均海面に代わって，国際的に統一された高さの基準系 IHRF が、水平位置に使われている ITRF と同様に使われるようになるでしょう。既に、ニュージーランド（図 4.9 参照）は、2016 年に導入し、米国では 2022 年を目途にその移行が進められています（村上、2017、松坂、2018）．CLAS の活用による標高は、こうした IHRF の導入が必要になってくるでしょう。

5.4　各種高さの比較

本章では、世界測地系導入以前に使われた正規正標高、世界測地系導入時に採用されたヘルメルト正標高及び現代的な正規高の 3 種類について述べてきましたが、これらの高さの違いについて考察します。

全地球で見たヘルメルト正標高と正規高の差は、平地で *mm*～*cm*、海洋ではほとんど一致、高山で 1*m* に達するかもしれないとされています（Torge、2011、 83 頁）。

図 5.8 は、日本で一番標高の高い一等水準点がある野麦峠を経由した長野県木祖村から岐阜県高山市に通じる路線の標高（正規正標高）、正標高（ヘルメルト正標高）及び正規高を計算し比較した結果です。《正標高－標高》及び《正規高－標高》を表してありますが、地形との相関関係が高いことが読み取れます。従来使われていた楕円補正との差は、ヘルメルト正標高補正で 20cm 以上及び正規高補正で 10cm に達しています。山岳地域において、楕円補正は十分な重力の補正でないことが分かります。

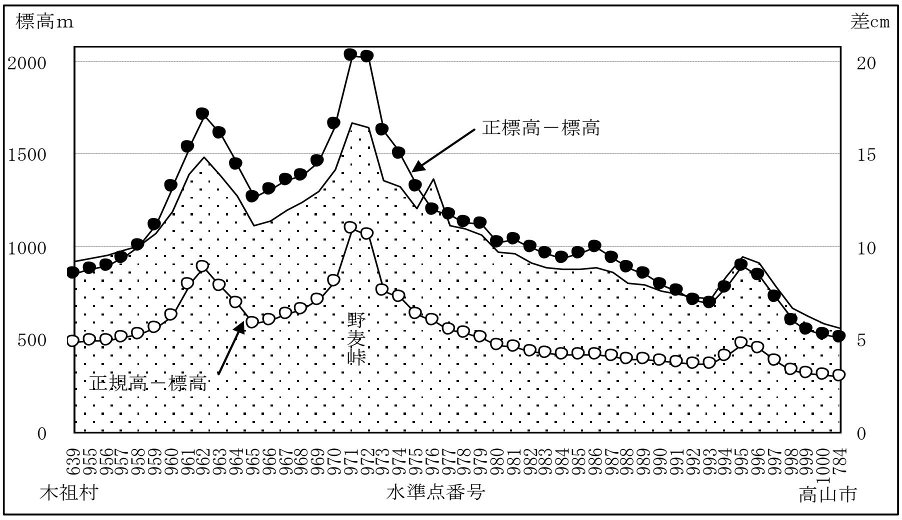


図 5.8　野麦峠付近のヘルメルト正標高、正規高と正規正標高の差（大滝他、2010、204 頁による）

5.5　水準測量成果の信頼度

標高を求める方法は、従来型の望遠鏡水準測量による場合と衛星測位による場合があります。これらの測量方法による誤差評価を考察します。

5.5.1　一等水準測量の誤差

表 5.1 は、図 5.1 に示した一等水準点の明治以来の繰り返し測量の成果である（国見他、2001)。この表に示す第 8 回の成果が、2002 年度に世界測地系が導入されたとき使われた「基本水準点の 2000 年度平均成果改定に伴う公共水準点成果改定マニュアル（案)、2001 年」に示された「2000 年度成果」です。

表 5.1　明治以来の水準測量

	第 1 回	第 2 回	第 3 回	第 4 回	第 5 回	第 6 回	第 7 回	第 8 回
観測年度	1883 -1913	1921 -1943	1947 -1961	1955 -1973	1967 -1976	1970 -1981	1980 -1990	1986 -1999
路線長(km)	18,542	12,458	15,648	17,902	14,088	14,809	18,081	17,521
標準偏差(mm)	3.5	2.5	2.8	2.0	1.7	1.5	1.5	1.3

この表に示す標準偏差は、環閉合差から算出した値です。準則第 69 条に示された環閉合差の許容範囲は、第 4 回目当時の標準偏差を使い、$2mm\sqrt{S(km)}$として規定されています。この式に基づいて、日本水準原点を出発した 1000km 余り離れた北海道及び九州における誤差は、10cm 程度と推定されます。つまり、相対測位ですから、日本水準原点から遠ざかるにつれ、標高の誤差が大きくなります。

一方、IHRF に基づく衛星測位による高さは、相対測位でないので、日本全域の誤差は、均等になります。

5.5.2　衛星測位による標高の誤差

衛星測位による標高は、準則第 43 条に定められた基線ベクトルによる相対測位及び精密単独測位である CLAS（Centimeter Level Augmentation Service）による 2 種類があります。

5.5.2.1　基線ベクトルによる 3 次元網平均計算：準則第 43 条（平均計算）に定められた新点の標高の標準偏差は、200mm と定められています。この内容は、既知点として三角点標高成果が使われる場合があり、三角測量時代における三角点の標高誤差が、引き継がれているためと推定できます。

5.5.2.2　CLAS の仕様：CLAS の精度仕様による高さは、静止の場合で「6.13cm（RMS)」又は「≤12cm（95%)」と定められています。現在各組織において実証実験による信頼度の検証が行われています。従いまして、時間間隔を置いて複数回の観測により、信頼度を増すような工夫が必要になってきます。

６　地殻変動

日本列島は、４つのプレート境界に位置し、大きな地殻変動の場にあります。図 6.1 及び図 6.2 にそれぞれ、水平地殻変動及び上下地殻変動を示しています。図 6.1 の水平変動量は、年間平均数 cm ですが、2011 年東北地方太平洋沖地震地域の余効変動は非常に大きくなっています。図 6.2 の上下変動量は、水平変動量より約１桁小さい値ですが、水平変動量と同様に余効変動域は大きな値になっています。

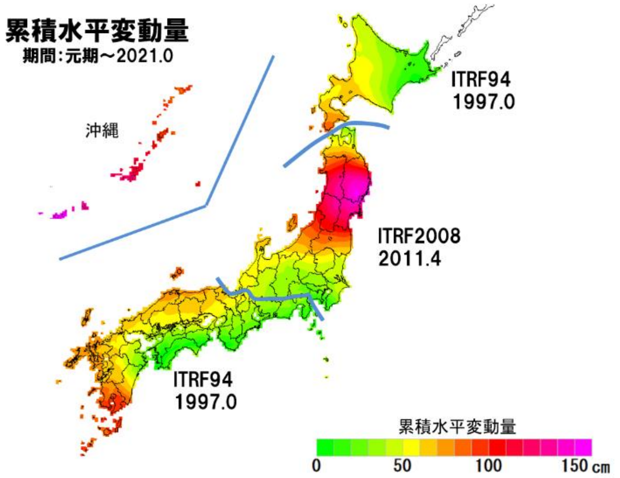


図 6.1　水平地殻変動

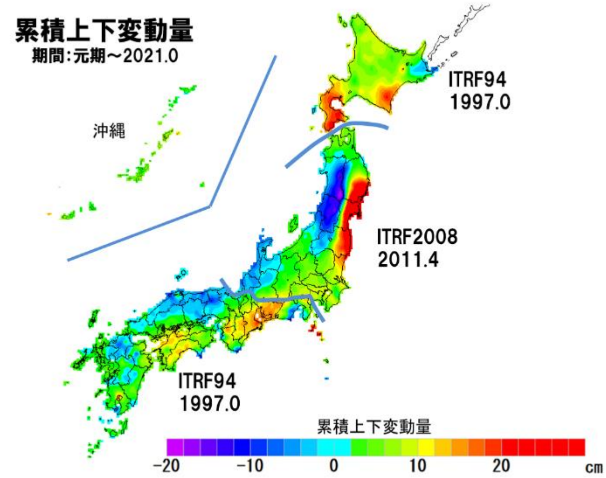


図 6.2 上下地殻変動

図は、国土地理院が公開した地殻変動補正パラメータ(SemiDyna2020.par)を使って当社が図示した。

6.1　ジオイドの変化

ジオイドは、重力の影響によって決まるものです。重力の変化は、プレートの運動によるような長期間を要する変化及び火山活動、地震の地殻変動による短期の変化などがあります。そのうち、地震等の地殻変動による上下変動の結果、地上の重力は大きく変化します。しかし、ジオイドはほとんど変化しません。例えば、2011年東北地方太平洋沖地震において、図6.2に示す、地殻変動が1mを超える牡鹿半島で、ジオイドの変化は、－15mm～－18mm程度でした（檜山他、2011）。結局、国土地理院は、この地震に伴うジオイドの変化を考えず、地震前のジオイド・モデルが地震後も引き続き使われています。

6.2　地殻変動と標高

地殻変動地域における標高は、既に述べましたように、①地殻変動の影響を考慮しないスタティック系②元期の標高で表示するセミ・ダイナミック系③最新の標高で表示するダイナミック系の３種類があります。

測量法第 11 条に基づく日本水準原点を出発点とした水準点標高は、定常的地殻変動の影響を顧慮しない「スタティック系」です。準則第 43 条に定められた基準点測量による標高は、「セミ・ダイナミック系」を定めています。

一方、国民生活で必要な標高は、現在時点の「ダイナミック系」です。図 6.2 に示す震源地に近い気仙沼では、地震時に 1m 程度沈下しましたが、その後の余効変動は隆起に転じました。気仙沼の防潮提建設にあたり、住民は、景観上少しでも低いことを望み、余効変動を考慮することを望みました。国土地理院は、測量法に基づいて東京の日本水準原点を出発点として水準測量を実施し、2017 年 2 月に＋22cm の隆起を観測し、それを測量法の高さとしました。その後の隆起量は、国土地理院のセミ・ダイナミック補正計算では、図 6.3 に示すように、2021 年 1 月 1 日時点で 40.7cm となっています。

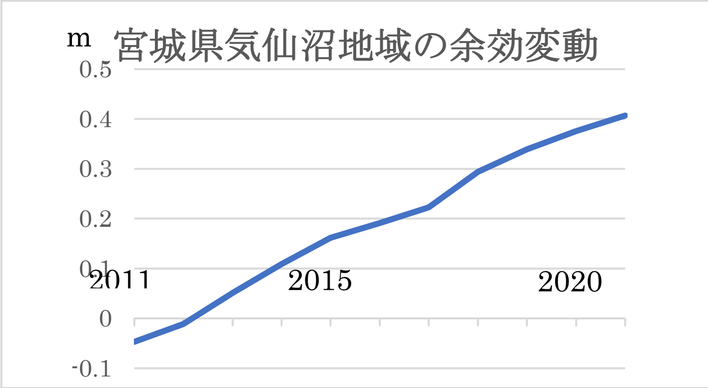


図 6.3　気仙沼付近の余効変動（隆起量）

図 6.2 に示したように、東北地方の中央から日本海側にかけて大きな沈降が見られます。最上川付近では、最大 15cm 程度の沈降が見られます。元期の標高を基準に堤防の高さを決めると 15cm 低い堤防ができてしまいます。従って、防潮堤や堤防は、ダイナミック標高系が必要になります。このダイナミック標高を手軽に求めるには、GNSS によるダイナミックな楕円体高を測定し、ジオイド高を減じることです。そのためにも、正確なジオイド高の構築が要求されます。又、IHRF の導入も必要になるでしょう。

7　期待される GNSS 水準測量とダイナミック系の標高の導入

図 6.3 に示すように、気仙沼住民の要望に応えるためには、現在は、東京の日本水準原点を出発した手間をかけた従来型の望遠鏡による水準測量によらなければなりません。手間がかかるので、頻繁に新しい成果を得ることはできず、十分に住民の要望に応えるわけにはいきません。

1946 年に発生した南海道地震は、四国・中国・近畿地方に大きな被害を与えました。この地震に対する水準測量の復旧には、総延長 4815km の水準測量が、1947 年 2 月から 1950 年 8 月まで、4 年近くの歳月を要しました（国土地理院、昭和 45 年）。

現在、国土地理院が進めている航空重力測量により、正確なジオイド・モデルが作られれば、GNSS 測量により得られた楕円体高から、精密なジオイド高を差し引いて、正確な標高が得られます。そうすれば、GNSS／水準測量が手間のかかる望遠鏡水準測量にとって代わることができます。また、日本国内を対象としたジオイドから世界に共通するジオイドをつくり、世界に共通する標高を構築することが可能になります。

現行測量法は、三角測量時代に作成されたもので、水平位置と高さが別々に扱われている「2＋1 次元測地学」に基づくものです。最新の衛星測位は、4 次元測地学に基づくもので、品質も向上し地殻変動の検出可能なものですから、地理空間情報活用推進基本法（平成 19 年法律第 63 号）が定めるように、位置は（X,Y,Z,T）の 4 次元で扱う必要があります。そのためには、測量法の見直しなどが必要になるでしょう（中根・松坂、2019）。具体的には、次の 4 点が考慮されるでしょう。①測量法施行令第 2 条に規定された日本経緯度原点の原点方位角を削除すると共に楕円体高を追加規定する。②GRS80 の二つの物理定数（GM、ω）を施行令に追加規定する。③測量法第 31 条に定める地震等による成果の修正と同様に、定常的地殻変動に対応した条文を追加する。④現在の測量法第 11 条及び同法施行令第 2 条に定めるスタティック系の標高は、GNSS 測位に基づくダイナミック系の値とする。

標高に限らず、空港の位置は、ダイナミック系で表示する提案もなされています（里村、2021）。

参考文献

安藤久・佐々木正博・畑中雄樹・田中和之・重松宏実・黒石裕樹・福田洋一(2002)：「日本のジオイド 2000」の構築，国土地理院時報 No97.

Atumi K. (1933): La deviation de la verticale au Japan, Japanese Journal of Astronomy and Geophysics, Vol.10, pp305-312.

David T. Sandwell and Walter H. F. Smith (1997): Marine gravity anomaly from Geosat and ERS 1 satellite altimetry JGR 102.

Kuroishi Y., H. Ando, Y. Fukuda (2002): A new hybrid geoid model for Japan, GSIGeo2000, Journal of Geodesy, 76:428-436.

Kuroishi Y. (2001): A new geoid model for Japan, JGEOID2000, in Gravity, Geoid, and Geodynamics 2000. IAG Sympo. , edited by M. G. Sideris, 123, 323-393, Springer.

Kuroishi Y. (2009): Improved geoid model determination for Japan from GRACE and a regional gravity field model, Earth Planets Space, 61, pp807-813.

The Defense Mapping Agency (1987): DMA Technical Report, Its definition and relationship with local geodetic system.

Torge W. and J. Muller (2011): Geodesy 4th Edition, De Gruyter.

Vanicek P. and E. Krakiwsky (1982): Geodesy: The Concepts, North -Holland, Amsterdam.

海津 優・田辺 正・中川 弘之・林 保・松村 正一・村上 亮 (2003): 測地測量と地殻変動研究第 1 編-6、国土地理院時報、No100.

建設省大臣官房技術調査室監修 (昭和 60 年): 建設省公共測量作業規程、日本測量協会.

国見利夫・高野良仁・鈴木実・斎藤正・成田次範・岡村誠司 (2001): 水準測量データから求めた日本列島 100 年間の地殻上下変動、国土地理院時報、No96.

国土地理院 (2003): 測地成果 2000 構築概要，国土地理院技術資料 B-5 No20.

国土地理院 (昭和45年): 測量・地図100年史、155頁。

小板橋勝・小島秀基・根本悟**1**・宮原伐折羅・平岡喜文・矢萩智裕 (2018): ジオイド・モデル「日本のジオイド**2011**」（**Ver.2**）の構築、国土地理院時報、No.130。

西修二郎 (1981): 日本の天文ジオイドについて，国土地理院時報 No55.

中根勝見・松坂茂 (2019): 日本における高さの課題、測地学会誌、印刷中。

辻 宏道・松村正一 (2011): 平成 23 年（2011 年）東北地方太平洋沖地震に伴う基準点測量成果の改定、国土地理院時報 2011 No.122、55-78.

坪川家恒・大森又吉 (1968): 測地学序説、山海堂、307 頁。

日本測地学会：測地学テキスト＜ http://www.geod.jpn.org/web-text/index.html#gsc.tab=0 ＞(平成 2 年): 測量学事典、246 頁.

飯塚修功，大滝三夫，中根勝見 (2010): 測量計算，東洋書店。

陸地測量部 (大正 11 年): 陸地測量部沿革誌。

兒玉篤郎・森下遊・宮原伐折羅・河和宏・海老名頼利・黒石裕樹 (2013): 新しいジオイド・モデル「日本のジオイド2011+2000」の構築 —中国・四国・九州地方におけるジオイド・モデルの改定—，国土地理院時報 No124.

内閣府：センチメータ級測位補強サービス｜技術情報｜みちびき（準天頂衛星システム：QZSS）公式サイト - 内閣府.

中根勝見 (2002): 日本の鉛直線偏差2000, 写真測量とリモートセンシング, Vol.41, No5.

檜山洋平・山際敦史・川原敏雄・岩田昭雄・福﨑順洋・東海林靖・佐藤雄大・湯通堂 亨・佐々木利行・重松宏実・山尾裕美・犬飼孝明・大滝三夫・小門研亮・栗原 忍・木村勲・堤 隆司・矢萩智裕・古屋有希子・影山勇雄・川元智司・山口和典 (2011): 平成23 年（2011 年）東北地方太平洋沖地震に伴う基準点測量成果の改定、国土地理院時報No122.

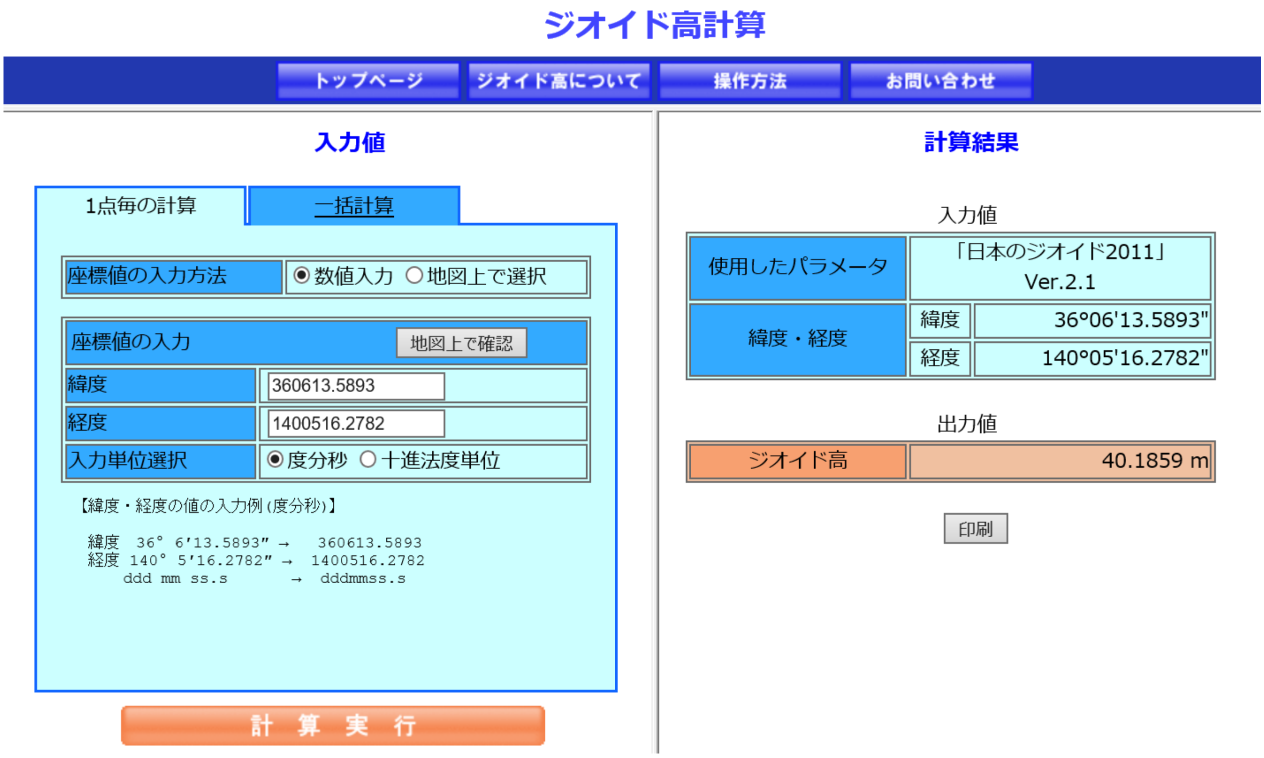
松坂茂 (2018): 準天頂衛星 4 機体制運用開始記念出版座標系の話，p49．アイサンテクノロジー株式会社.

村上 広史 (2017): 準天頂衛星システム時代の測位と測量, SPACシンポジウム2017, 国土地理院の測量施策 (eiseisokui.or.jp).

里村幹夫 (2021): 時間とともに変動する座標：GNSS測量に地殻変動を取り込む, 月刊測量2021年6月号.

追補 1　ジオイド高の計算

ジオイド高は、国土地理院の Website から、下図の左に示す緯度、経度欄にそれぞれの数値（360613.5893）及び（1400516.2782）を入力して、下の「計算実行」をクリックすると、計算結果が下図の右下に「ジオイド高　40.1859m」と計算結果が示されます。



ジオイド高の計算

国土地理院＜ https://vldb.gsi.go.jp/sokuchi/surveycalc/geoid/calcgh/calcframe.html ＞

追補 2　地球の重力ポテンシャルモデル

重力とポテンシャル

地球上にある物体に働く重力は、地球の引力と遠心力を合成したものです。そのうち引力は質量をもつ物体同士に働く力(万有引力)で、遠心力は地球が回転しているため地球上に静止している物体が感じる力です。

物理の法則によると、力（電磁力や重力など）はポテンシャルエネルギーから導かれます。力はポテンシャルの変化量（微分）に関係しています。

Vをポテンシャルエネルギーとすると、力はポテンシャルの勾配：

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} V \tag{1}$$

となります。$\boldsymbol{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$は各方向への微分を表す演算子で、勾配（gradient）はポテンシャルの変化が最大になる方向を向くベクトルです(図 1)。

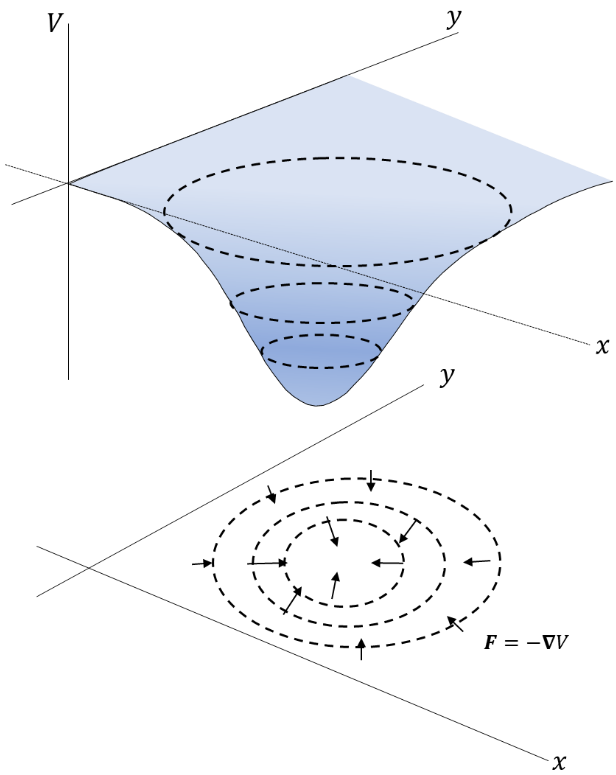


図 1．ポテンシャル（V）の勾配（$\boldsymbol{\nabla}$）と力（$\boldsymbol{F}$）

万有引力のポテンシャルエネルギー

質量がMとmの二つの質点間に働く引力(図 2)は

$$F = -\frac{GMm}{r^2} \tag{2}$$

質量（Mとm）に比例し、距離の 2 乗に反比例（$1/r^2$）しています。

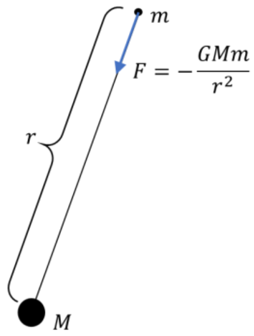


図 2.　万有引力

このような力をもたらすポテンシャルエネルギーは、式(3)の形になります。ただし、Gは万有引力定数です。GRS80 楕円体では、地球引力定数GM＝3986005.5×10^{-9}m^{3}s^{-2}が、定義されています。

$$V=-\frac{GMm}{r} \qquad (3)$$

また、他にも質量をもつ物体があれば、ポテンシャルエネルギーは、すべての質量によるポテンシャルを足し合わせたものになります。

なお、以下ではポテンシャルエネルギーの符号を測地学の慣用にあわせ＋としています。この場合、力を－をつけないポテンシャルの勾配と定義すれば同じ答えになりますので、問題ありません。

さて、地球の重力ポテンシャルWは、点$\mathrm{P}(x,y,z)$にある単位質量の物体に働く力を導くポテンシャルエネルギーで、万有引力ポテンシャルVと遠心力ポテンシャルΦを足し合わせた和となります（式 4）。

$$W=V+\Phi \qquad (4)$$

Vは地球内部の質量によるポテンシャルを足し合わせたもの(図 3)、

$$V=G\int\frac{dm}{l} \qquad (5)$$

Φは地球の自転角速度ωより、式(6)となります。

$$\Phi=\frac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2) \qquad (6)$$

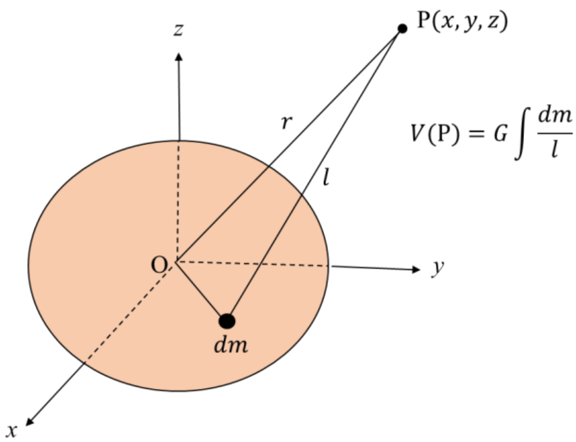


図 3.　P におけるポテンシャル

引力ポテンシャルは、質量がないところで次のラプラス方程式を満たすことがわかっています。

$$\triangle V = 0 \tag{7}$$

$$\left(\triangle = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \text{ラプラス演算子} \right)$$

従って、地球の外部ではこの方程式がなりたちます（ジオイドの上に質量がない)。ラプラス方程式の解は調和関数と呼ばれます。どのような関数が調和関数なのか、まず、簡単のために 2 次元の場合を見てみましょう。

調和関数による展開

2 次元のラプラス方程式は、

$$\triangle f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \tag{8}$$

となります。極座標（図 4）では、

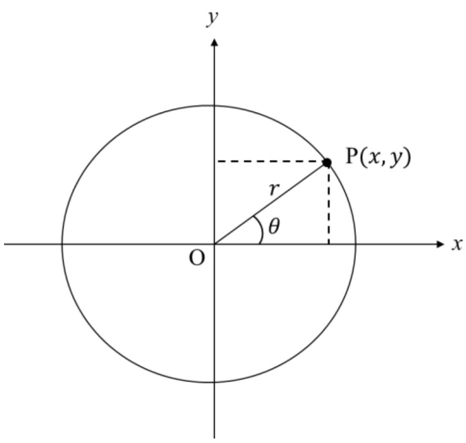


図 4．極座標表示(2 次元)

$$\triangle f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = 0 \tag{9}$$

となります。この解で

$$f(r,\theta) = r^k g(\theta) \tag{10}$$

の形をしているものを求めてみます。上式に代入すると

$$\triangle f = r^{k-2}\left(k^2 g + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}\right) = 0 \tag{11}$$

従って、単位円周$S^1(r=1)$上で、

$$\frac{d^2 g}{d\theta^2} + k^2 g = 0 \tag{12}$$

となればよいことが分かります。 この解は、

$$g(\theta) = \sum (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) \tag{13}$$

となり、おなじみのフーリエ級数です(図 5)。フーリエ級数は様々な周期の sin、cos 関数を足し合わせ、任意の周期関数を表すことができます。図 5 に、

$$f = A_0 + 0.3\sin 2\theta + 0.2\sin 10\theta + 0.1\sin 60\theta$$

の例を示しました。一般の解は、

$$u_k = r^k \cos k\theta,\quad v_k = r^k \sin k\theta \tag{14}$$

を、結合したものになります。

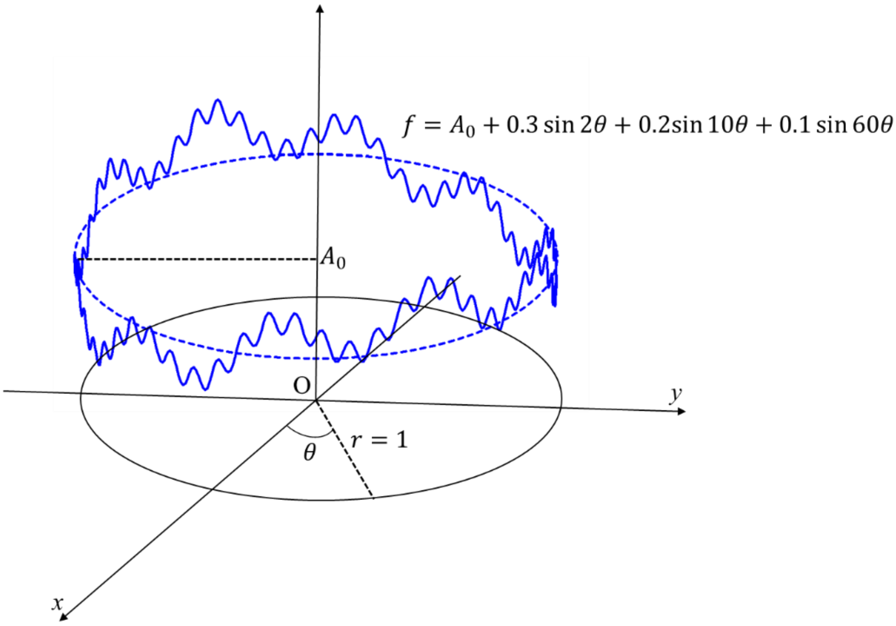


図 5. フーリエ級数による展開

さて、私たちの目的とする 3 次元空間でも同じように

$$f(r,\theta,\varphi) = r^n g(\theta,\varphi),\qquad g(\theta,\varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi) \tag{15}$$

の形のラプラス方程式の解を求めてみましょう。

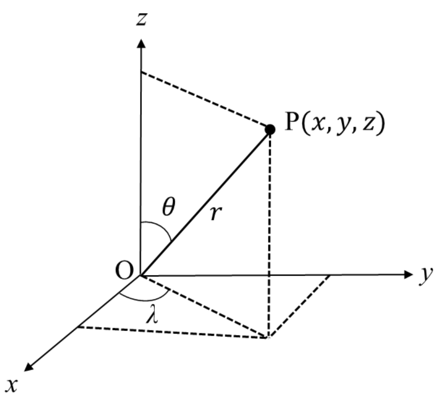


図 6. 三次元の球座標

ラプラス方程式を球座標(図 6)で書くと、

$$\triangle f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\triangle_{S^2} f = 0 \tag{16}$$

$$\triangle_{S^2} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}, \qquad \text{（球面}S^2\text{上のラプラス演算子）}$$

となるので、式(15)を代入して

$$\triangle f = r^{n-2}(n(n+1)g + \triangle_{S^2} g)$$

から、

$$\triangle f = 0 \iff \triangle_{S^2} g = -n(n+1)g \tag{17}$$

となり、さらに

$$g(\theta,\varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi) \tag{18}$$

から Θ と Φ に関する方程式が得られます。Φは、

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + m^2\Phi = 0 \tag{19}$$

となるので、解は、$\cos m\varphi$, $\sin m\varphi$の和になります(式(13)参照)。

Θに関する方程式は

$$t = \cos\theta,$$

とおいて、$u(\cos\theta) = \Theta(\theta)$ と書くと

$$(1-t^2)u'' - 2tu' + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{1-t^2}\right)u = 0 \tag{20}$$

となります。m は、$0 \le m \le n$の範囲を動きその解は、

$m = 0$ のとき、　$P_n(t) = P_{n0}(t)$：ルジャンドル多項式(関数)

$0 \le m \le n$のとき、$P_{nm}(t)$：ルジャンドル陪多項式

と呼ばれています。例えば、

$$P_0(\cos\theta) = 1, \qquad P_1(\cos\theta) = \cos\theta, \qquad P_2(\cos\theta) = \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1)$$

となっています。

以上をまとめると、球面上でのラプラス方程式の一般解は、

$$g(\theta,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}[A_{nm}P_{nm}(\cos\theta)\cos m\lambda + B_{nm}P_{nm}(\cos\theta)\sin m\lambda] \tag{21}$$

となります。[　]のなかは球面調和関数と呼ばれ、ルジャンドル関数に sin、cos を掛けた（及びその和）形になります。

ルジャンドル多項式の例を図 7 に、典型的な球面調和関数の例を図 8 に示しておきます。

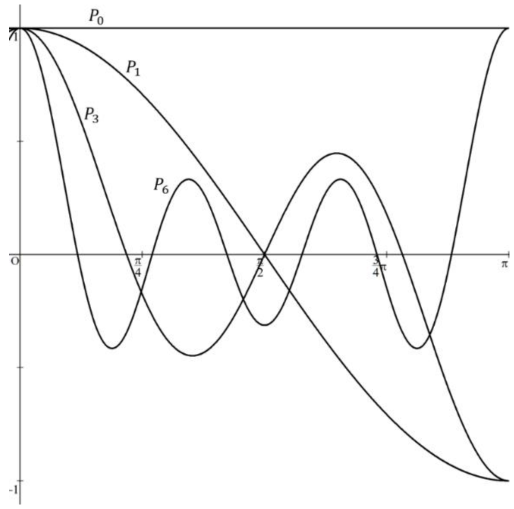
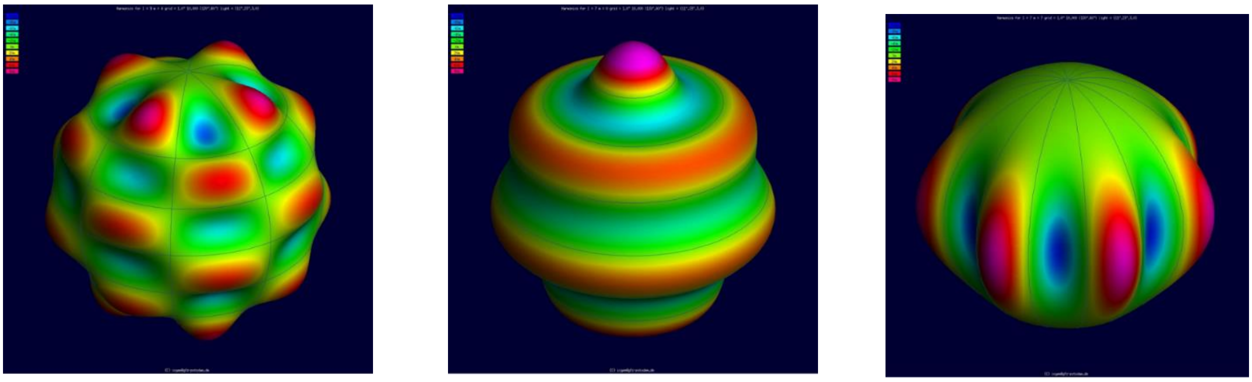


図 7. ルジャンドル多項式 $(n = 0,1,3,6)$



(a) $P_{94}(\cos\theta)\cos 4\lambda$ (b) $P_7(\cos\theta)$ (c) $P_{77}(\cos\theta)\cos 7\lambda$

図 8. 球面調和関数の例（ICGEM のサイト http://icgem.gfz-potsdam.de/vis3d/tutorial で描画したもの。関数の値は、赤系は正（球面より上)、青系は負、線で 0 となる。）

図 8 において、aは$m \neq 0$の場合でルジャンドル多項式が$0 \leq \theta \leq \pi$ の間に$n-m$回符号が変わり$\cos m\lambda$と$\sin m\lambda$は$0 \leq \lambda < 2\pi$の間に$2m$個の 0 がある縞球調和関数、bは$m = 0$の場合でλに関係しない帯球調和関数及び c は$m = n$ の場合で球を正と負の扇方にわける扇形調和関数と呼ばれています。

測地学では、計算や取り扱いを簡単にするため、式(21)で与えられた関数に適当な係数をかけた正規化球面調和関数（球面上の平均値が 1 になる）を使います。そうすると(21)式は、－を上につけて正規化されたことを示し、

$$g(\theta,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}[\bar{A}_{nm}\bar{P}_{nm}(\cos\theta)\cos m\lambda + \bar{B}_{nm}\bar{P}_{nm}(\cos\theta)\sin m\lambda] \qquad (22)$$

となります。3 次元空間での一般解は、

$$f(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n g(\theta,\lambda) \quad \text{または} \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^{n+1}}g(\theta,\lambda) \qquad (23)$$

となります。

地球の重力ポテンシャルモデル（遠心力ポテンシャル除く）

地球の重力ポテンシャルモデルは、地球内部の質量によるポテンシャル（式（5））を調和関数で展開して次のように書かれます（式(3.7)参照)。

$$V(r,\theta,\lambda) = \frac{GM}{r}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^{n}(\bar{C}_{nm}\cos m\lambda + \bar{S}_{nm}\sin m\lambda)\bar{P}_{nm}(\cos\theta)\right] \qquad (24)$$

ここで、

GM：地心引力定数(GRS80 では、398600.5× $10^9 m^3 s^{-2}$)

r：地球重心からの距離

a：地球楕円体の赤道半径

n, m：次数及び位数

θ：余緯度、λ：経度

$\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$,：正規化された重力係数

$\bar{P}_{nm}(\cos\theta)$：正規化されたルジャンドル陪多項式

です。

式（24）の低次の項を見てみましょう。

$n = 0$：最初の項は常数でポテンシャルの平均値となります。地球が完全な球の場合の値です。他の項は、地球内の質量分布が平均からどれだけずれているかを示すものです。ポテンシャルが平均値のみであれば、人工衛星は（不変の楕円軌道を描く）ケプラー運動をしますが、他の項があるため楕円軌道から「摂動（ずれ、ふらつき)」を起こします。それを解析することによって球面調和関数の係数を推定することができるのです。

$n = 1$：1 次の係数は地球の重心を原点に選ぶことによって 0 になります。例えば、$P_1(\cos\theta) = \cos\theta$があると、$\cos\theta$は北半球では正、南半球では負になり重心は原点より北にあることになり矛盾します。従って係数C_{10}は 0 です。他の係数も同様に 0 です。

$n = 2$：係数C_{20}は負で$C_{20}\,P_{20}$は赤道付近が極よりも質量が大きいことを示します（図 9)。つまり地球の扁平率を表しています。C_{20}は他の係数より 100 倍大きくなっています（$\bar{C}_{20} \approx -4.8 \times 10^{-4}$)。$C_{21}, S_{21}$は、地球の自転軸が北半球と南半球の質量のバランスによりわずかにゆらぐことを示します。揺らぎは非常に小さいので係数も 0 に近くなっています。C_{22}, S_{22}は、赤道が完全な円でない度合いを示すものです。

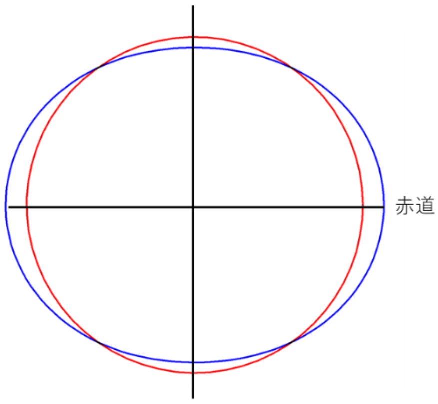


図 9．負の係数の$P_{20}(\cos\theta)$（青)、赤は平均値。

$n = 3$：P_{30}の存在は地球が西洋ナシ型をしていることを表しています（図 10)。

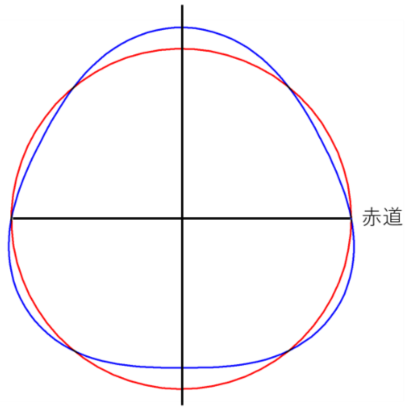


図 10. $P_{30}(\cos\theta)$

モデルの精密さは各重力係数を正確にいくつまで決定できるかで決まります。係数は地球内部の質量分布の関数ですが、残念ながら地球内部を詳しく知ることはできません。従って、様々なデータを総合して推定することになります。

基本的には、長波長成分（次数が低い、n が小さい）は、人工衛星の軌道解析から決定され、次数が高い短波長成分は航空重力測定も含めた地上重力観測やアルチメトリから求めます。地上重力データはそのままではなく、実際の重力と正規重力との差：重力異常

$$\Delta g = g_P - \gamma_Q \qquad (25)$$

として用いられています。g_Pは P における実測重力、γ_Qはテルロイド上 Q での正規重力値です（図 11）。ジオイド高の計算は、本文式（3.5）に示したストークス積分

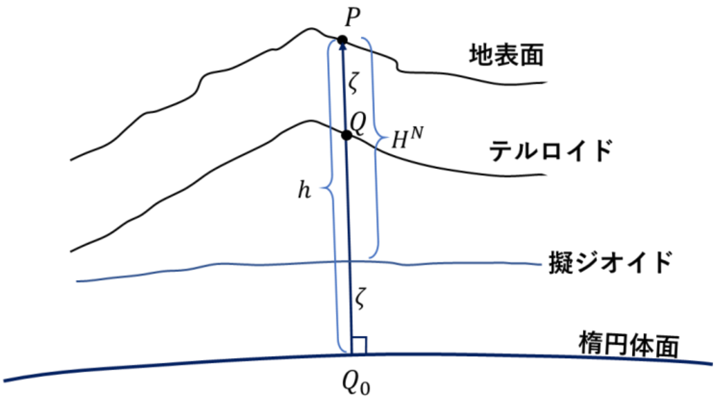


図 11. テルロイド：楕円体面上の正規重力ポテンシャル値（U_Q）が対応する地上の実ポテンシャル値（W_P）に等しい面（$U_Q = W_P$）。

（参考）PQ＝ζをハイトアノマリーといい、楕円体からζの高さの面を擬ジオイド(quasi-geoid)といいます。最近は、地球内部の密度の仮定が必要な従来のジオイドに代わってこの quasi-geoid が使われる傾向にあります。この quasi-geoid を使った高さH^Nは、正規高(normal height)と呼ばれています（$h = H^N + \zeta$）。現在日本で使われているジオイド高からの高さは、ヘルメルト正標高と呼ばれています。

正規重力ポテンシャル

最後に準拠楕円体が作る正規重力ポテンシャルの球面調和関数での展開について述べたいと思います。 回

転楕円体の重力ポテンシャルは、地球と同様

$$U = V + \Phi \tag{26}$$

と表されます。Vは引力ポテンシャル、Φは遠心力ポテンシャルです。

正規重力ポテンシャル（遠心力ポテンシャルを除く）Vは、楕円体面で一定値をとり、また、回転楕円体ですので経度λには依存しません。また、赤道に関して対称ですから次数nは偶数のみとなります。これらのことから球面調和関数で展開すると、

$$V = \frac{GM}{r}\left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}\left(\frac{a}{r}\right)^{2n} P_{2n}(\cos\theta)\right] \tag{27}$$

となります。

J_{2n}は定数係数です。特に、

$$J_2 = \frac{2}{3}f - \frac{1}{3}m - \frac{1}{3}f^2 + \frac{2}{21}fm$$

$$J_4 = -\frac{4}{5}f^2 + \frac{4}{7}fm$$

と表せます。ここで、

f：扁平率

$$m = \frac{\omega^2 a^2 b}{GM},$$

ω：地球自転角速度,　b：極半径

です。

（余談）WGS84 楕円体の扁平率は、球面調和関数の２次の係数：

$\bar{C}_{20} = -J_2/\sqrt{5}$　（J_2は GRS80 の値）

を使い計算されました。その時、上式の値を 8 桁までで打ち切ったため、GRS80 楕円体の扁平率$1/f = 298.2572222101$と WGS84 楕円体の扁平率$1/f = 298.257223563$の間にわずかの差が出たのは有名な話です。ただし、これらの扁平率の差による極半径bは、0.01mm の食い違いに過ぎず、実用的には何ら問題ありません。

追補３　潮汐力と座標系・重力ポテンシャルの話

潮汐というと海水の満ち引きが頭に浮かびます。潮汐は、月と太陽の重力によって引き起こされ、地球の自転・公転により周期的に繰り返される海面高の変化（～数m）です。

地球の中心から見ると天体からの引力は大きさと方向の差がありますので、その差分の力（潮汐力）により海水が動き潮汐となるのです（図 12)。

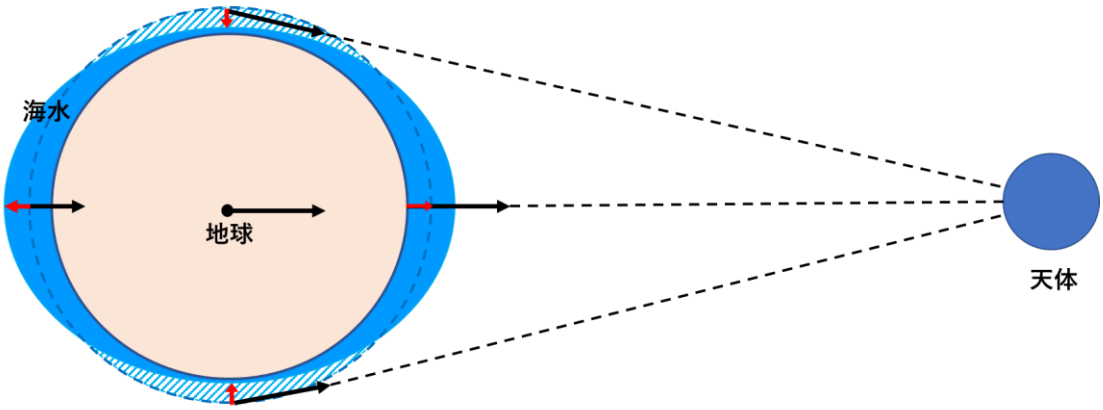


図 12 海洋潮汐

引力は地球のどの部分にも働いていますから、固体の部分にも潮汐力が作用しています。
その結果、実は固体地球も海と同じように変形するのです。それを地球(固体)潮汐と呼びます（図 13)。変形の程度は約 30cm ですが、基準点の位置が時間によって移動しますので、座標系を構築する場合、地球潮汐をどのように取り扱えばよいのかが問題になります。また、外部天体による引力は重力の等ポテンシャル面も変形させますのでジオイドの定義にも影響があります。

潮汐力の永年成分と永年変形

月や太陽による潮汐力は、周期的（半日、1 日、それ以上の長周期）に変動しますが、長時間の平均をとってもゼロにはなりません。地球から見れば月や太陽は常に赤道付近（赤道を中心に±20 数度）を回っているからです。これを潮汐力の永年成分といいます。永年成分の影響を整理してみましょう。

１．地球の形（地殻）

地球の形は図 2 のように外部天体の潮汐力で変形しますが、時間変動する成分を取り除いても、潮汐の永年成分による変形（永年変形）が残ります。

２．重力ポテンシャル

地球の周りの重力ポテンシャルは、外部天体による潮汐力ポテンシャルと地球自身のポテンシャルの和です。外部のポテンシャルは、時間変動成分と永年成分を持ちます。地球自身のポテンシャルには、永年変形部分によるポテンシャル成分も含まれます。

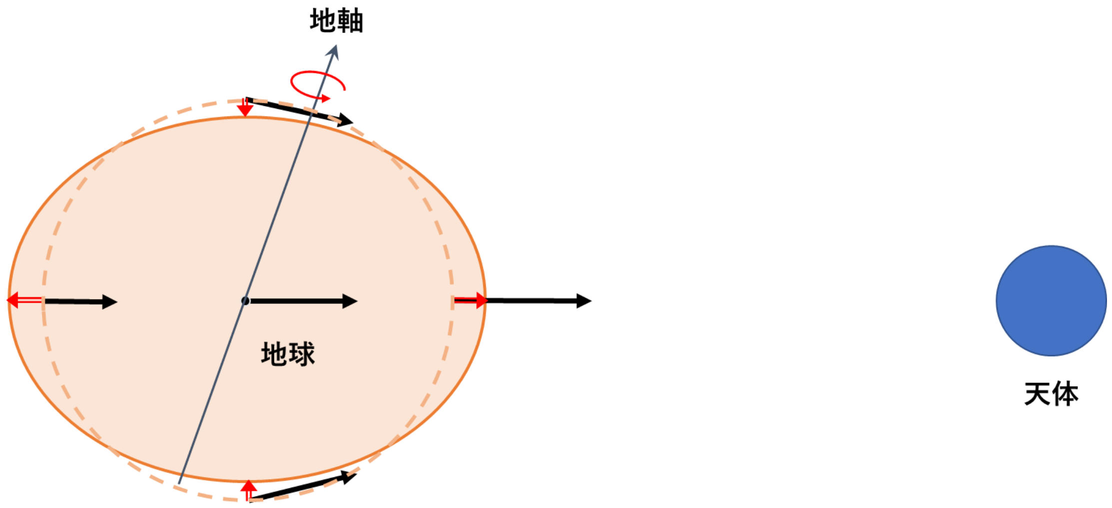


図 13　地球潮汐

測地基準系を定義するとき、基準点位置やジオイド面の形は周期的に変動すると困るので、時間変動する成分は取り除くのが普通です。しかし、時間変動成分を取り除いても残るこの永年変形（成分）をどう取り扱うかによって、次の 3 つの潮汐システムが考えられています。

(1)平均潮汐（mean tide）：時間変動成分を取り除いたもの。永年成分は残す。

(2)ゼロ潮汐　(zero tide）：永年成分のうち外部天体から直接影響される部分は取り除く。地球の永年変形によるポテンシャルの変形は残る。

(3)潮汐フリー（tide free）：すべての潮汐の影響を取り除く。

地球の固体部分に関しては、「平均」と「ゼロ」は同じなので、

(1)平均（mean）地殻：周期的時間変動がないもの。永年変形あり。

(2)潮汐フリー（tide free）地殻：潮汐による変形をすべて取り除く。

の 2 つの場合が考えられます。

現在、世界標準の地球基準系となっている ITRF は、(2) の潮汐フリー地殻上の位置を採用しています。また、グローバルな地球重力ポテンシャルモデルである EGM2008 等は潮汐フリーです（Petit and　Luzum, 2010）。

GNSS などで観測された瞬間の位置は潮汐成分がすべて含まれています。解析の際、長時間平均をとることは実際的ではないので、衛星測位による位置決定では精密な潮汐モデルによって潮汐の影響をすべて取り除き、潮汐フリー系での位置を出しています。

重力や重力ジオイドの場合は、ゼロ潮汐システムを使っている国や地が多いようですが、統一はされていません。また、水準測量による標高決定においても潮汐システムの違いにより差異が生じます。日本の水準測量は潮汐力に関しては一切処理が加えられておらず、観測の瞬間における等ポテンシャル面に準拠しています（黒石, 2003）。

（参考）

永年変形の重力ポテンシャルへの影響は、ポテンシャルの展開式において扁平率を与える項 C_{20}（追補 2：

（24)、図 9 参照）を考えれば十分です（1 ㎜程度の精度)。

ジオイド高の差は次のようになります（Smith, 1998）:

$$N^{mean\ tide} - N^{zero\ tide} = 1 \times (-0.198m) \times \left(\frac{3}{2}sin^2\varphi - \frac{1}{2}\right)$$

$$N^{zero\ tide} - N^{tide\ free} = k \times (-0.198m) \times \left(\frac{3}{2}sin^2\varphi - \frac{1}{2}\right)$$

また、楕円体高の差は以下の通りです：

$$h^{mean\ tide} - h^{tide\ free} = h \times (-0.198m) \times \left(\frac{3}{2}sin^2\varphi - \frac{1}{2}\right)$$

ここで、φは緯度、h, kはラブ数というもので天体が潮汐力ポテンシャルでどのくらい変形するかの目安を与える定数です。hは固体部分、kはポテンシャル面の変形率を表します（地球では、$h \cong 0.6$, $k \cong 0.3$ です)。

追補 4　ストークス積分による精密ジオイド高の構築

これまでジオイド高に関する解説を行ってきました。その一つが式(3.5)に示したストークス積分によるものです。又、追補 2 式(21) では、球面上でのラプラス方程式の一般解を示しました。地上重力、航空重力及び海上重力により測定された日本周辺の正確なジオイド高は、次に示す「Remove and Restore」という方法で構築されます（Torge and Müller, 2011)。

1. 観測点の重力異常Δgから全地球的な長波長成分による重力異常Δg_Mを減じる。
2. 観測点の地形の影響のような短波長成分による重力異常Δg_rを減じる。
3. 内挿により、重力異常の格子点の値を次式により求める。$\Delta g_{res} = \Delta g - \Delta g_M - \Delta g_r$
4. 式(3.5)に示したストークスの式により、格子点のジオイド高N_{res}を計算する。
5. 長波長及び単波長を加え、格子点のジオイド高$N = N_{res} + N_M + N_r$を計算する。

追補参考文献

Defense Mapping Agency (1985): Geodesy for the Layman, 5th edition 1983, NOAA Reprint.
Gallier, Jean (2013): “Notes on Spherical Harmonics and Linear Representations of Lie Groups (PDF)”. Department of Computer and Information Science University of Pennsylvania. 2020/07/30 閲覧。
Heiskanen, W. A., and H. Moritz (1967): Physical Geodesy, W.H. Freeman, San Francisco, Calif.
International Center for Global Earth Models (ICGEM) (1984): http://icgem.gfz-potsdam.de/home
National Geospatial-Intelligence Agency (NGA) Standardization Document (2014): Department of Defense World Geodetic System.
Torge W. and J Müller (2011): GEODESY 4th Edition, De Gruyter.
Smith, D. A., (1998): There is no such thing as "The" EGM96 geoid: Subtle points on the use of a global geopotential model, IGeS Bulletin 8, International Geoid Service, Milan, Italy, pp17-28, 1998.
Petit G., Luzum B., eds. (2010): IERS Conventions (2010). IERS Technical Note 36, Observatoire de Paris, Paris.
黒石裕樹 (2003): 宇宙測地における座標系の取り扱いについて－その 1 標高基準－. 国土地理院時報 2003 No.102.

８．まとめ

衛星測位の進化に伴い、ダイナミックな位置情報（X,Y,Z,T）は、容易に取得できるようになりました。それに対して、標高は、測量法第 11 条及び同法施行令第 2 条に基づいて決められています。最新の標高は、その都度、東京の日本水準原点を出発点として、手間のかかる望遠鏡水準測量によって決められます。例えば、2011 年東北地方太平洋沖地震に伴う地域における余効変動は、大きいところでは、現在 50cm の隆起となっています。そのため、測量法第 31 条に基づく修正測量が、2015 年度から 2019 年度にかけて行われ、20cm を超える隆起を確認しました。その後も隆起は進行していますから、最新の成果は、その都度、日本水準原点を出発点とした水準測量に頼らなければなりません。

日本は、風水害や津波被害が多く発生する国です。そのため、絶えず最新の標高が、必要になります。最新の標高は、現在のスタティック標高系でなく、ダイナミック標高系によらなければなりません。そのため、国土地理院では水準測量による標高の仕組みに加え、GPS 等の衛星測位を活用した標高計測の仕組みを導入するための取り組みを開始しました。その目的実現は、衛星測位による楕円体高からジオイド高を減じた標高の測量成果から得られることにあります。

ジオイド高の精度は、算出の素である重力値の品質に左右されますが、現在国内にある重力値は約 30 年以上前に観測されたものが大半な上、山岳部や沿岸域など観測が困難な地域では空白域が存在します。そこで、空間解像度の高い均質な重力値を効率的に再整備するため、航空機に重力計を搭載し上空から重力を測定する「航空重力測量」プロジェクトが 2018 年より開始されました。

こうした新しいダイナミック標高系は、測量法の改正及び公共測量作業規程の準則の改正の後、誰でも簡単に処理できるようマニュアル化されると思います。例え実務作業が滞りなく行われたとしても、私達測量技術者は、その内容を理解しておく必要があると思い、本書の作成を思い立ちました。

2022 年 3 月

筆者

あ

い

え

か

く

け

こ

し

す

せ

そ

た

ち

と

な

に

は

ひ

ふ

へ

ほ

ら

り

る

れ

執筆者紹介（50 音順）

中根勝見（なかねかつみ）
1937 年　東京都生まれ
1955 年　建設省地理調査所入省
　　　　測地測量及び途上国研修員教育に従事
1997 年　退職（国土地理院地殻調査部研究官）
1997 年　アイサンテクノロジー株式会社　技術顧問、現在に至る
　　　　博士（工学）、技術士（応用理学）
　　　　主な著書　測量データの３次元処理（東洋書店）、測量計算（東洋書店）共著

松坂茂（まつざかしげる）
1956 年　千葉県生まれ
1982 年　東京大学大学院理学系研究科修了
1982 年　国土交通省国土地理院に入省
　　　　宇宙測地技術（主に VLBI）の開発、解析及び国際測地観測に従事
2016 年　退職（国土地理院測地部測地技術調整官）
2017 年　アイサンテクノロジー株式会社　技術顧問、現在に至る
　　　　理学修士

望遠鏡水準測量からGNSS水準測量へ
50 頁で分かる図解によるやさしい
国際高さ基準座標系（IHRF）とジオイドのお話

2022年03月　初版発行
アイサンテクノロジー株式会社

〒460-0003　名古屋市中区錦3-7-14 ATビル
電話0529507500・FAX0529507507
URL https://www.aisantec.co.jp/